


**Conteúdo:** 9 aulas e 73 exercícios em vídeo.

**Versão:** 10 de janeiro de 2022.

**Verifique se existe versão com data mais recente:** [aqui](#).

**Autor:** Rui Paiva ([ruipaivac@gmail.com](mailto:ruipaivac@gmail.com), [www.academiaaberta.pt](http://www.academiaaberta.pt)).

**Instruções:** Vídeo da aula → Exercícios → Confirmar resultados nos vídeos

**Nota:** Para visualizar a resolução dum exercício deve clicar no ícone .

## AULA 1: Razões trigonométricas

### Sumário/pré-requisitos


#### Trigonometria


- Nota histórica;
- Razões trigonométricas de um ângulo agudo.

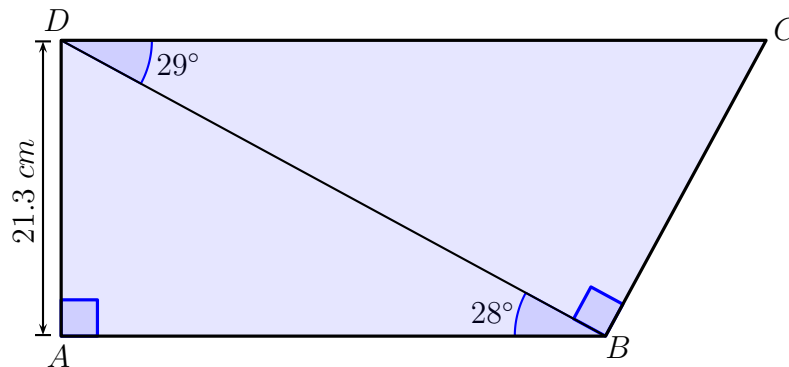
#### Pré-requisitos:


O estudante deverá ter conhecimentos elementares de operações numéricas e de equações do 1.º grau.

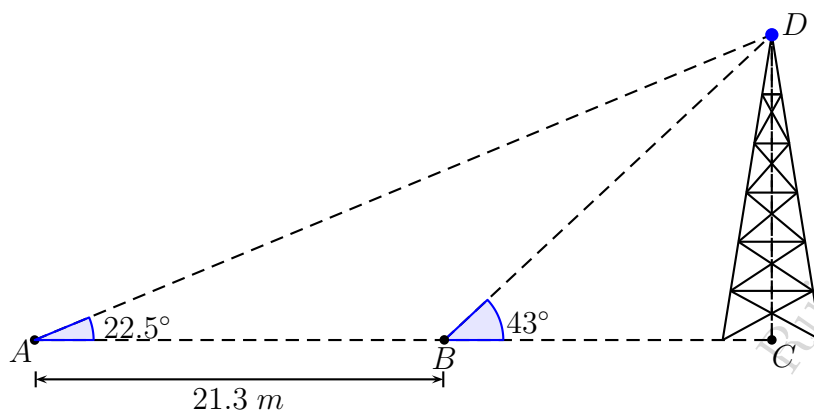



Se tiver dificuldades em visualizar a Aula 1 clique em .

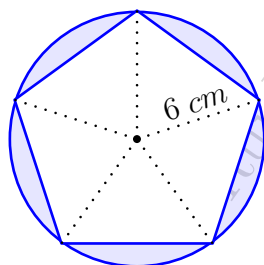
1.1.  Determine, com aproximação às décimas, a área do quadrilátero  $[ABCD]$ .



- 1.2.  Determine, com base nas indicações da figura, a altura da do poste de eletricidade arredondada às centésimas.



- 1.3.  Determine, com arredondamento às centésimas, a área a sombreado na figura, limitada por uma circunferência e por um polígono regular.



## AULA 2: Ângulos de referência

### Sumário/pré-requisitos


#### Trigonometria


- Ângulos de referência.

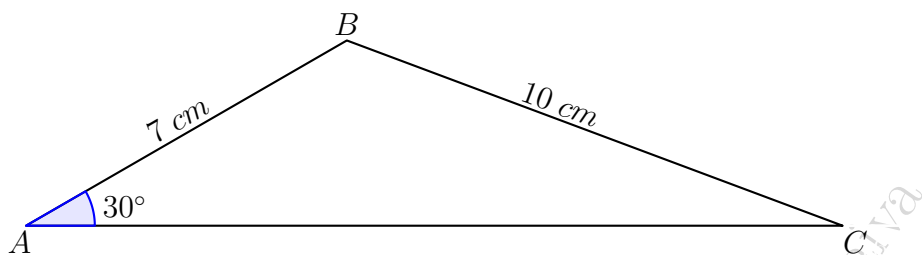
#### Pré-requisitos:


O estudante deverá ter conhecimentos elementares de operações com raízes quadradas e de equações do 1.º grau.



Se tiver dificuldades em visualizar a Aula 2 clique em .

2.1.  Determine o **valor exato** do perímetro do seguinte triângulo:



2.2.  Simplifique cada uma das seguintes expressões:

(a)  $\sin 45^\circ \cos 30^\circ - \sqrt{2} \operatorname{tg} 60^\circ$

(b)  $\frac{\operatorname{tg} 45^\circ + 2 \sin 30^\circ}{\sin 60^\circ - 4 \cos 60^\circ}$

(c)  $6 \operatorname{tg}^2 30^\circ - \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}$

### AULA 3: Ângulo e arco generalizados

#### Sumário/pré-requisitos


##### Trigonometria


- Ângulo e arco generalizados.

##### Pré-requisitos:

O estudante deverá conhecer os conceitos de referencial ortonormado, de ângulo e saber trabalhar com um transferidor.



Se tiver dificuldades em visualizar a Aula 3 clique em .

3.1.  Represente num referencial os ângulos de amplitudes  $75^\circ$ ,  $200^\circ$ ,  $-240^\circ$  e  $1256^\circ$ , indique o seu quadrante e a expressão geral dos ângulos com o mesmo lado origem e lado extremidade que cada um deles.

Sumário/pré-requisitos

**Trigonometria**

- Ângulo e arco generalizados.

**Pré-requisitos:**

O estudante deverá conhecer os conceitos de referencial ortonormado, de ângulo e saber trabalhar com um transferidor.



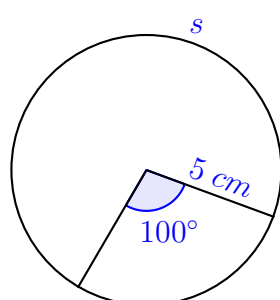
Se tiver dificuldades em visualizar a Aula 4 clique em

4.1. Converta em radianos  $210^\circ$ ,  $195^\circ$  e  $96^\circ 35'$ .

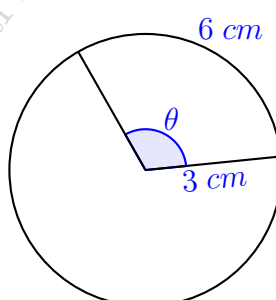
4.2. Converta em graus  $\frac{10}{3}\pi \text{ rad}$ ,  $-\frac{7}{5}\pi \text{ rad}$  e  $5 \text{ rad}$ .

4.3. Determine o comprimento do arco  $s$ , a amplitude em radianos de  $\theta$  e o raio  $r$  da circunferência:

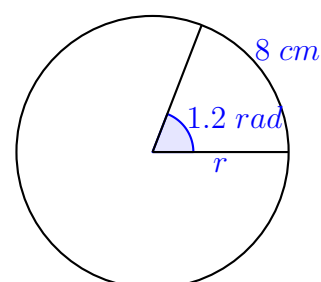
(a)



(b)



(c)



## Sumário/pré-requisitos

### Trigonometria

- Círculo trigonométrico;
- Seno, co-seno e tangente de um ângulo generalizado.

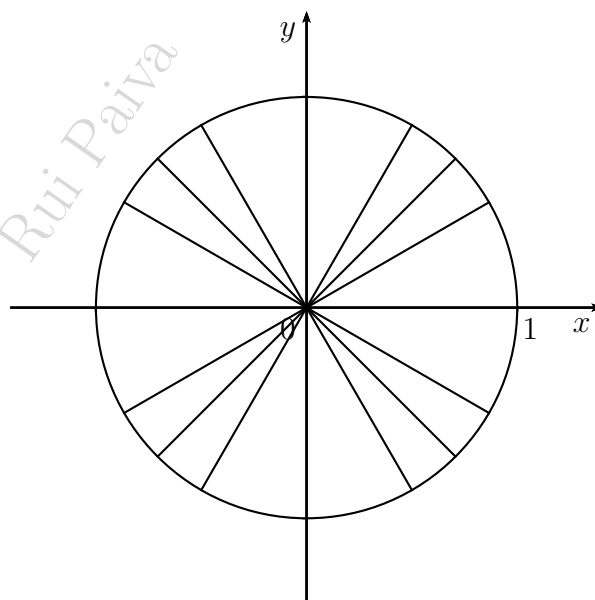
### Pré-requisitos:

O estudante deverá conhecer os conceitos de ângulo e amplitude de ângulo e conhecer as razões trigonométricas dos ângulos de amplitudes  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $60^\circ$ .



Se tiver dificuldades em visualizar a Aula 5 clique em .


- 5.1. Na figura seguinte estão representados o círculo trigonométrico e os ângulos múltiplos de  $30^\circ$  e de  $45^\circ$ . Determine a amplitude dos ângulos em graus e radianos e os valores exatos dos seus senos, co-senos e tangentes. Confirme os valores obtidos na calculadora.




- 5.2. Calcule o valor exato de cada uma das expressões:

(a)  $\text{sen}\pi + \text{sen}0 + \cos \pi - \text{sen} \left( \frac{3}{2}\pi \right) - 3 \cos \frac{3}{2}\pi;$




(b)  $\text{sen} \left( \frac{19}{3}\pi \right) + \cos(-3\pi) - \text{tg} \left( \frac{13}{4}\pi \right) + \cos \left( -\frac{13}{6}\pi \right);$

(c)   $\operatorname{tg}\left(\frac{17}{4}\pi\right) + \cos(6\pi) - \operatorname{sen}\left(-\frac{7}{2}\pi\right) + \cos\left(-\frac{43}{6}\pi\right).$







5.3.  Qual o quadrante em que:

- (a) o seno é positivo e crescente;
- (b) o seno é negativo e o co-seno positivo;
- (c) a tangente é negativa e o co-seno é crescente;
- (d) o seno é decrescente e o co-seno crescente.

5.4. Determine, recorrendo a intervalos de números reais, os valores de  $k$  para os quais as seguintes condições são possíveis:

- (a)   $\operatorname{sen} x = \frac{1-3k}{2} \wedge x \in ]\pi, 2\pi[$       (b)   $\cos x = k^2 - 2k + 1 \wedge x \in 1.^\circ Q$   
(c)   $\operatorname{tg} x = 4 - k^2 \wedge x \in ]\frac{\pi}{2}, \pi[.$

5.5. Determine o contradomínio de cada uma das seguintes funções:

- (a)   $f(x) = 2 + 3\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right);$       (b)   $f(x) = 1 - 2\cos^2 x;$   
(c)   $f(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x;$       (d)   $f(x) = \frac{1-3\cos^2 x}{2};$   
(e)   $f(x) = \frac{2 - \operatorname{sen}(x^2)}{3};$       (f)   $f(x) = \frac{8}{3 + 2\operatorname{sen} x}.$

## AULA 6: Redução ao 1.º quadrante

### Sumário/pré-requisitos

#### Trigonometria

- Relações trigonométricas:  $\pi - \alpha$ ,  $\pi + \alpha$ ,  $-\alpha$ ,  $2\pi - \alpha$ ,  $\frac{\pi}{2} - \alpha$ ,  $\frac{\pi}{2} + \alpha$ ,  $\frac{3}{2}\pi - \alpha$  e  $\frac{3}{2}\pi + \alpha$ .


#### Pré-requisitos:


O estudante deverá conhecer os conceitos de seno, co-seno e tangente de um ângulo bem como os seus valores nos ângulos de amplitudes  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $60^\circ$ .




Se tiver dificuldades em visualizar a Aula 6 clique em .


6.1. Exprima nas razões trigonométricas do ângulo de amplitude  $\alpha$  cada uma das seguintes expressões:


(a)   $\sin(3\pi - \alpha) - \cos(7\pi + \alpha) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ ;

(b)   $\sin\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) + 2\cos\left(\frac{5}{2}\pi - \alpha\right) + \operatorname{tg}(15\pi - \alpha)$ ;

(c)   $\operatorname{tg}\left(-\frac{5}{2}\pi + \frac{\alpha}{2}\right) \times \cos\left(-\frac{7}{2}\pi + \frac{\alpha}{2}\right)$ .

6.2. Calcule o valor exato de cada uma das seguintes expressões recorrendo à redução ao primeiro quadrante:

(a)   $4\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) - 2\cos\left(\frac{11}{4}\pi\right) - 3\operatorname{tg}\left(\frac{13}{4}\pi\right)$ ;

(b)   $\frac{10\sin\left(\frac{11}{6}\pi\right) + 6\operatorname{tg}\left(\frac{9}{4}\pi\right)}{1 - 2\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)}$ .

## AULA 7: Fórmulas trigonométricas

### Sumário/pré-requisitos

#### Trigonometria


- Fórmulas trigonométricas.


#### Pré-requisitos:

O estudante deverá conhecer os conceitos de seno, co-seno e tangente de um ângulo e saber aplicar o Teorema de Pitágoras. Operações com raízes quadradas.



Se tiver dificuldades em visualizar a Aula 7 clique em .

7.1.  Sabendo que  $\cos \alpha = \frac{1}{3}$  e que  $\alpha \in ]\pi, 2\pi[$  determine o valor exato de  $\operatorname{sen} \alpha - 2\operatorname{tg} \alpha$ .


7.2.  Sabendo que  $\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = 5$  e que  $\alpha \in ]0, \pi[$  determine o valor exato de


$$\operatorname{sen}\left(-\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \cos(\pi + \alpha) - \operatorname{tg}(5\pi - \alpha).$$


7.3.  Sabendo que  $\operatorname{tg}(\beta - \pi) = -\frac{1}{2}$  e que  $\beta \in ]0, \pi[$  calcule o valor exato de

$$\frac{5\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2} - \beta\right) + 2\cos\left(\frac{7\pi}{2} - \beta\right)}{2\operatorname{tg}(33\pi - \beta)}.$$

7.4. Mostre que, sempre que as expressões têm sentido, se tem:

(a)   $(\operatorname{sen}x - \cos x)^2 + 4\operatorname{sen}x \cos x - 1 = 2\operatorname{tg}x \cos^2 x;$

(b)   $\frac{(\operatorname{sen}x - \cos x)^2 - 1}{2\operatorname{sen}x} = -\cos x;$

(c)   $\frac{1}{1 - \operatorname{sen}x} - \frac{1}{1 + \operatorname{sen}x} = \frac{2\operatorname{tg}x}{\cos x}.$

## AULA 8: Funções trigonométricas

### Sumário/pré-requisitos


#### Trigonometria


- Funções trigonométricas: seno, co-seno e tangente.

#### Pré-requisitos:

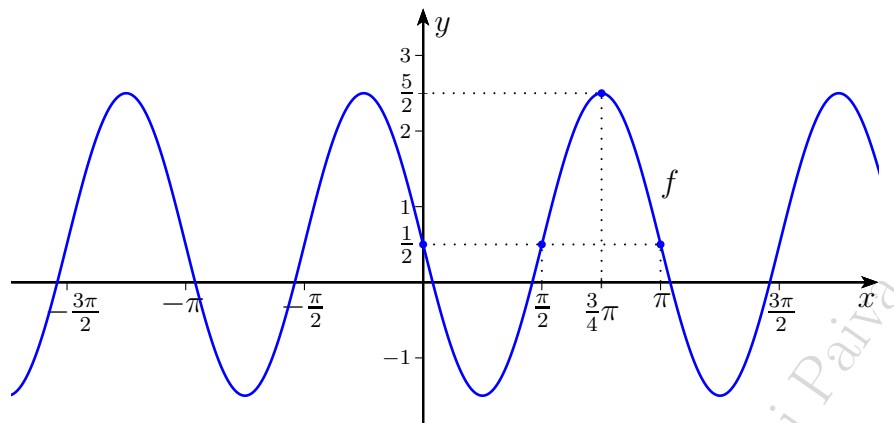
O estudante deverá conhecer os conceitos de seno, co-seno e tangente de um ângulo e as suas principais características.



Se tiver dificuldades em visualizar a Aula 8 clique em .

8.1.  Na figura seguinte está representado o gráfico de uma função real de variável real definida por  $f(x) = a + b\operatorname{sen}(2x)$  para  $a, b \in \mathbb{R}$ . Determine  $f(x)$ .





## AULA 9: Equações trigonométricas

### Sumário/pré-requisitos


#### Trigonometria

- Equações trigonométricas.

#### Pré-requisitos:


O estudante deverá conhecer os conceitos de seno, co-seno e tangente e saber as razões trigonométricas dos ângulos de amplitudes múltiplas de  $30^\circ$  e  $45^\circ$ .




Se tiver dificuldades em visualizar a Aula 9 clique em .


9.1. Resolva, cada uma das seguintes equações trigonométricas e indique, para as três primeiras, as soluções que pertencem ao intervalo  $[-\pi, \pi]$ .


(a)   $2\operatorname{sen}x = -\sqrt{3}$

(b)   $-\sqrt{2} - 2\operatorname{sen}(3x) = 0$

(c)   $3\operatorname{tg}x = -3\sqrt{3}$

(d)   $\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

(e)   $2\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sqrt{3} = 0$

(f)   $1 - 2\operatorname{sen}^2\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

9.2. Resolva no sistema circular cada uma das seguintes equações:

(a)  $(\operatorname{sen} x + 2)(\operatorname{tg} x + \sqrt{3}) = 0$

(b)  $2 \cos(2x - \frac{\pi}{3}) + \sqrt{3} = 0$

(c)  $2 \cos^2 x + \sqrt{3} \cos x = 0$

(d)  $2 \cos^2 x + 2 = -5 \cos x$

(e)  $\operatorname{sen} x = \cos x$

(f)  $\operatorname{sen}(2x) = -\cos(\frac{\pi}{5})$

(g)  $\cos(2x) + 3 \operatorname{sen} x = 2$

(h)  $\sqrt{3} \cos x - \operatorname{sen} x = 1$

(i)  $\operatorname{sen} x + \cos x = 1$

(j)  $\frac{1}{2} \operatorname{sen}(2x) = -\operatorname{sen} x$

(l)  $1 + \cos t = \cos \frac{t}{2}$

9.3. Uma função  $f$  é periódica de período  $P$  se  $f(x + P) = f(x)$ ,  $\forall x \in D_f$ . Ao menor valor da constante  $P$  que verifica esta condição chamamos período positivo mínimo de  $f$ .

Tendo esta definição em consideração, determine o período positivo mínimo da função definida por  $f(x) = 4 + 2 \operatorname{sen}(3x - 1)$ .