Matemática A

Preparação híbrida para o exame nacional 2023

12.º ano – Ensino Secundário

Rui Castanheira de Paiva

Preparação completa para o exame:

- Resumos teóricos acompanhados de vídeos
- Mais de 200 exercícios chave resolvidos em vídeo
- Mais de 350 exercícios resolvidos (10.º, 11.º e 12.º anos)
- Mais de 400 questões propostas com soluções (10.º, 11.º e 12.º anos)
- 6 Exames-tipo com resolução
- Exames nacionais desde 2015 a 2022 com resolução.

Conteúdos adicionais disponíveis em:

www.academiaaberta.pt

Introdução

O objetivo principal desta obra é preparar um aluno de forma completa para o exame nacional de Matemática A do 12.º ano através de um livro que acrescenta aos conteúdos habituais dos livros com o mesmo propósito que estão no mercado, resumos teóricos acompanhados de vídeos tutoriais, exercícios chave resolvidos passo a passo em vídeo e aplicações dinâmicas.

Todos estes conteúdos estão acessíveis através de endereços da Internet e de *QR Codes*. Deste modo, ao apontar a câmara de um *smartphone* ou *tablet* para as páginas do manual impresso visualizam-se vídeos, acede-se a aplicações dinâmicas e a outros recursos complementares relacionados com o tema abordado.

O livro inclui:

- Resumos teóricos acompanhados de vídeos (acessíveis por *QR Codes*);
- Mais de 200 exercícios chave resolvidos passo a passo em vídeo e apoiados por aplicações dinâmicas (acessíveis por *QR Codes*);
- Mais de 350 exercícios resolvidos de forma detalhada (10.º, 11.º e 12.º anos);
- Mais de 400 questões propostas com soluções desenvolvidas (10.º, 11.º e 12.º anos);
- 6 Exames-tipo com resolução;
- Exames nacionais de 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020 e 2021 com resolução;
- Exames nacionais de 2018, 2019 e 2020 com resolução em vídeo;
- Ligações a conteúdos adicionais disponíveis em www.academiaaberta.pt;
- As resoluções dos exercícios resolvidos num ficheiro PDF online (bit.ly/anexohibrido2021);
- credenciais de acesso aos conteúdos interativos e multimédia e instruções de utilização de um leitor de *QR Codes*.

O livro pode ser adquirido em bit.ly/comprapagalivrosficha.

Desejo o maior sucesso a todos!

O autor, Rui Paiva
Endereço eletrónico: ruipaivac@gmail.com
Home page: bit.ly/cvruipaiva

Conteúdo

IV Conteúdos de $10.^\circ$ e $11.^\circ$ anos

V Exames modelo do exame nacional

VI Exames nacionais

VII Resoluções dos exercícios resolvidos

1. Cálculo combinatório

1.1 Conjuntos

Definição 1.1 — Terminologia e definições elementares

- Podes ver um *conjunto* como uma coleção de objetos de qualquer tipo que denominamos por *elementos*. Os objetos podem ser números, pontos, pessoas, outros conjuntos, etc.
- Representamos um conjunto com uma letra maiúscula (A, B, C,...). Quando um elemento x pertence a um conjunto A escrevemos $x \in A$. Quando não pertence escrevemos $x \notin A$.
- Quando um conjunto tem um número finito de elementos é habitual escrevê-lo entre chavetas. Um conjunto A que contenha os elementos a, e, i, o e u podes ser representado em *extensão* por $A = \{a, e, i, o, u\}$.
- Podes também representar um conjunto em *compreensão* colocando entre chavetas a propriedade que caracteriza todos os seus elementos.
- No exemplo anterior $A = \{\text{conjunto formado pelas vogais}\}$, $A = \{x : x \text{ é vogal}\}$ ou $A = \{x | x \text{ é vogal}\}$. Nos últimos dois casos, podes ler "conjunto formado pelos valores de x tais que x é uma vogal. Deste modo $a \in A$ e $d \notin A$.
- Para representar o conjunto formado pelos conjuntos $\{1, 2\}$ e $\{0, 7\}$ escrevemos chavetas dentro de chavetas: $\{\{1, 2\}, \{0, 7\}\}$.
- Denominamos por *conjunto unitário* um conjunto que possui um único elemento.
- Um conjunto que não possua nenhum elemento denomina-se por *conjunto vazio* e representa-se por $\varnothing$ ou por $\{\ \}$. Note-se que a notação $\{\varnothing\}$ não é utilizada para denotar o conjunto vazio!

1.5 Arranjos com repetição

Definição 1.11 — Definição de arranjos com repetição
Dados n elementos diferentes, a_1, a_2,... , a_n, chama-se *arranjos com repetição* dos n elementos p a p ao número de sequências de p elementos, sendo estes diferentes ou não, que se podem formar de modo que as sequências diferem pelos elementos que as compõem ou pela ordem de colocação. O número de sequências representa-se por ${}^nA'_p$ (ler arranjos com repetição de n, p a p) e tem-se:

$$ {}^nA'_p = n^p. $$

Exemplo: Como o código de um cartão multibanco tem quatro dígitos há ${}^{10}A'_4 = 10^4 = 10000$ códigos distintos.

Vídeo: Podes aceder no endereço bit.ly/comblink4 ao vídeo de exposição da presente secção.

1.6 Combinações

Definição 1.12 — Definição de combinações
Dados n elementos diferentes, a_1, a_2,... , a_n, chama-se combinações dos n elementos p a p ao número de subconjuntos de p elementos escolhidos entre os n dados. O número de subconjuntos denota-se por ${}^nC_p$ (ler combinações de n, p a p) e têm-se

$$ {}^nC_p = \frac{n!}{p!(n-p)!}. $$

Exemplo: Com cinco frutos é possível fazer ${}^5C_3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10$ saladas de fruta constituídas por três frutos.

Vídeo: Podes aceder no endereço bit.ly/comblink5 ao vídeo de exposição da presente secção.

Resumo dos conceitos de análise combinatória

	Interessa a ordem?	**Há repetição de elementos?**
Permutação de n: $n!$	Sim	Não
Arranjos sem repetição: ${}^nA_p = \frac{n!}{(n-p)!}$	Sim	Não
Arranjos com repetição de p no meio de n: ${}^nA'_p = n^p$	Sim	Sim
Combinações de p no meio de n: ${}^nC_p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$	Não	Não

1.7 Triângulo de Pascal

O Triângulo de Pascal, também conhecido por triângulo de Tartaglia, é um triângulo numérico infinito formado por números da forma ${}^nC_p$ onde n representa o número da linha (posição horizontal), contando a partir de $n = 0$, e p a posição da coluna, contando a partir de $p = 0$ (posição vertical).

modos diferentes de sentar os rapazes e as raparigas juntos.

Problema resolvido 1.25
De quantos modos distintos podes arrumar numa estante 3 livros de Matemática, 2 de Física e 1 de Português juntos por disciplinas?

Resolução:
O esquema seguinte ilustra uma possibilidade de arrumação dos livros.

$$\frac{M_1}{3}\quad\frac{M_2}{2}\quad\frac{M_3}{1}\quad\frac{F_1}{2}\quad\frac{F_2}{1}\quad\frac{P_1}{1}$$

Temos no total

$3! \times 2! \times 1! \times 3! = 72$ modos distintos de arrumar os livros na prateleira.

Há 3! possibilidades de permutar as 3 disciplinas.

Há 2! possibilidades de colocar os livros de Física

Há 3! possibilidades de colocar os livros de Matemática

Nota: Neste tipo de exercício o erro mais frequente é pensar que só há 3 modos de permutar as 3 disciplinas. Note-se que há 6 possibilidades, correspondentes a 3!:
MFP, MPF, FMP, PMF, FPM e PFM.

Problema resolvido 1.26 — Vídeo disponível em bit.ly/comblink15
De quantas maneiras diferentes se podem colocar numa prateleira, em fila, 2 livros de Física e 3 de Matemática

1.26.1 sem restrições?

1.26.2 se os livros ficarem juntos por disciplinas?

Resolução:
1.26.1 Uma vez que não há restrições, podes tratar os livros de Física e de Matemática de forma indiferenciada e concluir pela definição de permutação (ver Definição 1.8) que podes colocar os 5 livros na prateleira de $P_5 = 5! = 120$ modos distintos.

1.26.2 Denotemos os livros de Física por F e os de Matemática por M.

$$\times 2$$

$$\frac{\text{F}}{2}\quad\frac{\text{F}}{1}\quad\frac{\text{M}}{3}\quad\frac{\text{M}}{2}\quad\frac{\text{M}}{1}$$

Podes assim concluir que há $2\times 1\times 3\times 2\times 1\times 2 = 2!\times 3!\times 2 = 24$ modos diferentes de arrumar os livros na prateleira juntos por disciplinas.

Problema resolvido 1.27 — Vídeo disponível em bit.ly/comblink16
De quantas maneiras diferentes podem sentar-se 7 amigos:

1.27.1 no balcão de um snack-bar?

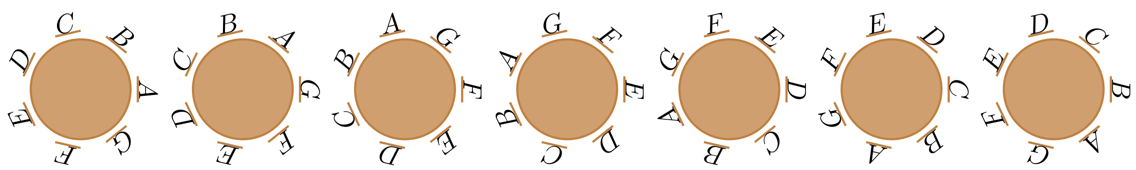
1.27.2 numa mesa redonda?

1.27.3 num banco tendo em conta que a Ana não quer ficar junto do Pedro, seu ex-namorado?

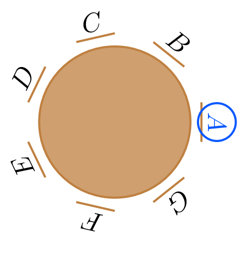
1.27.4 numa banco se houver três pessoas que não querem ficar juntas?

Resolução:
1.27.1 Uma vez que não há restrições, podes concluir pela definição de permutação (ver Definição 1.8) que podes sentar as 7 pessoas de $P_7 = 7! = 5040$ modos distintos.

1.27.2 Numa mesa redonda de 7 lugares devamos ter em consideração que cada situação origina 7 semelhantes.



Por esse motivo vamos ter $\dfrac{P_7}{7} = \dfrac{7!}{7} = \dfrac{7\times 6!}{7} = 6! = 720.$
Um modo alternativo de raciocínio é fixar uma das pessoas e permutar as restantes 6.



Deste modo vamos ter $P_6 = 6! = 720$.

1.27.3 Uma vez que há muitas possibilidades de a Ana e o Pedro estarem separados vamos subtrair ao total o número de maneiras de os sentar juntos.

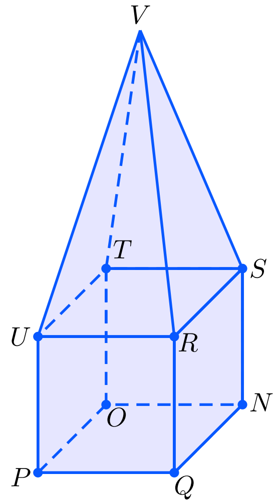
1.55.1 Considera que se dispõe de doze cores para colorir as nove faces do poliedro.
De quantos modos:

(a) se podem escolher nove cores para colorir o poliedro com nove cores distintas?

(b) se pode colorir o poliedro sem qualquer restrição?

(c) se pode colorir o poliedro de forma a que os triângulos tenham apenas duas cores distintas?

(d) se pode colorir o poliedro de forma a que as faces adjacentes não tenham a mesma cor?



1.55.2 Com os pontos do poliedro

(a) Quantas retas é possível definir?

(b) Quantos planos que contêm o ponto V se podem definir?

(c) Quantos planos se podem definir?

Resolução:

1.55.1 (a) Uma vez que a ordem de escolha das cores não interessa há ${}^{12}C_9 = 220$ possibilidades.

1.55.1 (b) Uma vez que a ordem de coloração interessa e podes haver repetição de cores há ${}^{12}A'_9 = 12^9 = 5159780352$ possibilidades.

1.55.1 (c) A coloração dos triângulos em duas cores tem as seguintes possibilidades:

- três triângulos com a mesma cor e o quarto triângulo com outra cor. Neste caso temos ${}^{12}A_2$ modos de escolher as duas cores. A opção por Arranjos deva-se ao facto de a primeira cor escolhida se destinar aos três triângulos com a mesma cor e a segunda cor ao triângulo que sobra. Para cada uma das escolhas das duas cores podes escolher os três triângulos que ficam com a mesma cor de ${}^{4}C_3$ maneiras. Como para cada uma destas possibilidades podes colorir as cinco faces quadrangulares de ${}^{12}A'_5$ maneiras temos no total ${}^{12}A_2 \times {}^{4}C_3 \times {}^{12}A'_5$ possibilidades.

- dois triângulos com uma cor e os outros dois com outra cor. Neste caso temos ${}^{12}C_2$ modos de escolher as duas cores. Para cada uma das escolhas das duas cores podes escolher dois triângulos que ficam com a mesma cor de ${}^{4}C_2$ maneiras. Como para cada uma destas possibilidades podes colorir as cinco faces quadrangulares de ${}^{12}A'_5$ maneiras temos no total ${}^{12}C_2 \times {}^{4}C_2 \times {}^{12}A'_5$ possibilidades.

O número total é portanto

$${}^{12}A_2 \times {}^{4}C_3 \times {}^{12}A'_5 + {}^{12}C_2 \times {}^{4}C_2 \times {}^{12}A'_5 = 229920768.$$

1.55.1 (d) Um método para obter a solução é começar por colorir as faces triangulares e depois as quadrangulares com o cuidado de ir diminuindo o número de opções para não ter faces

2. Probabilidades

2.1 Definição de probabilidade

Espaço de probabilidades

Definição 2.1 — Definição de probabilidade
Dado um conjunto finito E, uma probabilidade no conjunto $\mathcal{P}(E)$ das partes de E é uma função P de domínio $\mathcal{P}(E)$, de valores não negativos, tal que $P(E) = 1$ e, para $A, B \in \mathcal{P}(E)$ disjuntos, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
Neste contexto, o conjunto por E é o *espaço amostral* ou *universo dos resultados*, $\mathcal{P}(E)$ é o *espaço dos acontecimentos*, os respetivos elementos são os *acontecimentos*, $P(A)$, para $A \in \mathcal{P}(E)$, é a *probabilidade do acontecimento* A e o terno $(E, \mathcal{P}(E), P)$ é um caso particular de espaço de probabilidade.

Definição 2.2 — Classificação de acontecimentos
Dado um conjunto finito E, a função de P domínio $\mathcal{P}(E)$ definida por $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, um acontecimento $A \in \mathcal{P}(E)$ diz-se:

- *elementar* se $\#A = 1$;
- *composto* se $\#A > 1$;
- *certo* se $A = S$;
- *impossível* se $A = \varnothing$.

Exemplo: Relativamente aos acontecimentos do exemplo anterior temos que A é acontecimento composto e C é um acontecimento elementar.

Deste modo, $A \cap B$: "sair copas e sair dama" ou ainda $A \cap B$: "sair dama de copas". $\#(A \cap B) = 1$. O acontecimento $A \cap B$ é singular.
$B \cap C$: "sair dama e sair rei de espadas". $\#(B \cap C) = 0$. O acontecimento $B \cap C$ é impossível.
$A \cup C$: "sair copas ou sair rei de espadas". $\#(A \cup C) = 11$. O acontecimento $A \cup C$ é composto.
$C \cup D$: "sair rei de espadas ou valete". $\#(C \cup D) = 5$. O acontecimento $C \cup D$ é composto.

Problema resolvido 2.10 — Vídeo disponível em bit.ly/problink9
Considera um conjunto finito E, uma probabilidade P em $\mathcal{P}(E)$ e dois acontecimentos de $\mathcal{P}(E)$ tais que: $P\left(\overline{A}\right) = 0.3$, $P(B) = 0.5$ e $P(A \cup B) = 0.7$. Determina:

2.10.1 $P(A)$ **2.10.2** $P\left(\overline{B}\right)$ **2.10.3** $P(A \cap B)$

Resolução:
2.10.1 Sabemos por um teorema que $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$.
Deste modo, $P\left(\overline{A}\right) = 0.3 \Leftrightarrow 1 - P(A) = 0.3 \Leftrightarrow -P(A) = 0.3 - 1 \Leftrightarrow P(A) = 0.7$.

2.10.2 $P\left(\overline{B}\right) = 1 - P(B) = 1 - 0.5 = 0.5$.

2.10.3 Sabemos por um teorema que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
Logo vem $0.7 = 0.7 + 0.5 - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0.5$.

Problema resolvido 2.11 — Vídeo disponível em bit.ly/problink10
Demonstra que $P(A) + P(B) + P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 1 + P(A \cap B)$.

Resolução:
Vamos desenvolver a igualdade inicial até obter uma identidade verdadeira.

$$P(A) + P(B) + P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 1 + P(A \cap B)$$

$$\Leftrightarrow P(A) + P(B) + P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 + P(A \cap B) \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\Leftrightarrow P(A) + P(B) + 1 - P(A \cup B) = 1 + P(A \cap B) \qquad P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$$

$$\Leftrightarrow -P(A \cup B) = -P(A) - P(B) + P(A \cap B).$$

$$\Leftrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

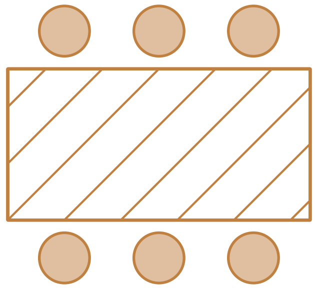
Uma vez que a igualdade inicial é equivalente a um resultado conhecido, a demonstração está concluída.

Problema resolvido 2.12 — Vídeo disponível em bit.ly/problink11
Demonstra que $P\left(\overline{\overline{A} \cap \overline{B}}\right) - 1 = P(B) - P\left(\overline{A}\right) - P\left(\overline{\overline{A} \cup \overline{B}}\right)$.

por 2. No total temos $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$ casos favoráveis a os casais se sentarem juntos com o casal Martins no meio. A Lei de Laplace garante que a probabilidade pedida é $\frac{2^4}{6!}$.

Problema resolvido 2.18 — Exame - vídeo disponível em bit.ly/problink15

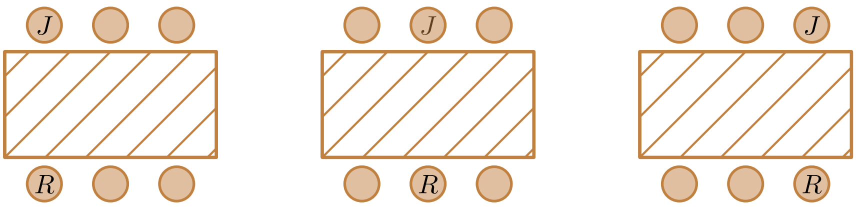
Seis amigos entram numa pastelaria para tomar café e sentam-se ao acaso numa mesa rectangular com três lugares de cada lado, como esquematizado na figura em baixo.



Determina a probabilidade de dois desses amigos, a Joana e o Rui, ficarem sentados em frente um do outro.

Resolução:

A Lei de Laplace diz-nos que a probabilidade de um acontecimento é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis e número de casos possíveis quando há equiprobabilidade de acontecimentos singulares. Como as seis pessoas distribuem-se nos lugares ao acaso há equiprobabilidade de cada pessoa se sentar em cada lugar e podemos utilizar a Lei de Laplace no cálculo da probabilidade pretendida. Os casos possíveis são 6! correspondentes às permutações das 6 pessoas nos 6 lugares. Relativamente aos casos favoráveis, comecemos por ilustrar a situação recorrendo a figuras.



Para a situação ilustrada no lado esquerdo temos 4! maneiras de permutar os 4 amigos da Joana e do Rui nos 4 lugares sobrantes. Como a Joana e o Rui também podem ficar sentados em frente um do outro nos lugares do meio ou do extremo direito e trocar de lugar entre si de 2 modos, como ilustrado na figura seguinte

3. Limites e continuidade

3.1 Definição de limite

Definição 3.1 — Definição de ponto aderente
Dado um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, a é um *ponto aderente* de A quando existe uma sucessão (x_n) de elementos de A tal que $\lim x_n = a$.

Definição 3.2 — Definição de limite de uma função segundo Heine
Seja f uma função real de variável real de domínio D_f, $b \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $a = +\infty$ ou $a = -\infty$.
Se a é um ponto aderente de D_f, $a = +\infty$ ou $a = -\infty$ diz-se que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ se e só se para toda a sucessão (x_n), de termos pertencentes a D_f, convergente para a, $\lim f(x_n) = b$.
Note-se que $b \in \mathbb{R}$, $b = +\infty$ ou $b = -\infty$.
Define-se *limite à esquerda de a* com $\lim\limits_{x \to a} f|_{]-\infty,a[}(x)$ e denota-se por $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$.
Define-se *limite à direita de a* com $\lim\limits_{x \to a} f|_{]a,+\infty[}(x)$ e denota-se por $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$.

Teorema 3.1 — Existência de limite
Seja f uma função real de variável real de domínio D_f e $a \in \mathbb{R}$.

- se a é um ponto aderente de D_f, $a \notin D_f$ e os limites $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ existirem e forem iguais então $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe e $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$.
- se $a \in D_f$ e os limites $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ existirem e forem ambos iguais a $f(a)$ então $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe e $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

Problema resolvido 3.21 — Metas curriculares

Seja (v_n) uma sucessão tal que $\lim v_n = +\infty$. Justifica que:

3.21.1 $\lim (v_n + 3n - 10) = +\infty$; **3.21.2** $\lim \left(-v_n \dfrac{2n^2+n}{n+1}\right) = -\infty$;

3.21.3 $\lim (-v_n + \sin n - 3) = -\infty$.

Resolução:

3.21.1 Como $3n - 10 > 0 \Leftrightarrow n > \frac{10}{3}$ então $v_n + 3n - 10 \geq v_n$, $\forall n \geq 4$. Como $\lim v_n = +\infty$ então, pela Proposição 3.8, $\lim (v_n + 3n - 10) = +\infty$.

3.21.2

$$\begin{aligned}\lim \left(-v_n \frac{2n^2+n}{n+1}\right) &= \lim (-v_n) \times \lim \frac{2n^2+n}{n+1} = \lim (-v_n) \times \lim \frac{2n^2}{n} \\ &= \lim (-v_n) \times \lim (2n) = -\infty \times (+\infty) = -\infty.\end{aligned}$$

3.21.3 Comecemos por notar que $-1 \leq \sin n \leq 1 \Rightarrow -4 \leq \sin n - 3 \leq -2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Assim, como $\lim (-v_n) = -\infty$ e $-v_n + \sin n - 3 \leq -v_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ então, pela Proposição 3.8, $\lim (-v_n + \sin n - 3) = -\infty$.

Problema resolvido 3.22 — Metas curriculares

Mostra que $\lim \dfrac{2n}{n+3} \leq \lim \dfrac{3n}{n+4}$ sem calcular limites.

Resolução:

Comecemos por notar que, como $n + 3 \geq 0$ e $n + 4 > 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$ então

$$\frac{2n}{n+3} \leq \frac{3n}{n+4} \Leftrightarrow 2n^2 + 8n \leq 3n^2 + 9n \Leftrightarrow n^2 + n \geq 0 \Leftrightarrow n + 1 \geq 0 \Leftrightarrow n \geq -1.$$

A condição $n \geq -1$ é universal em $\mathbb{N}$. Logo, pela Proposição 3.8, $\lim \dfrac{2n}{n+3} \leq \lim \dfrac{3n}{n+4}$.

Problema resolvido 3.23 — Vídeo disponível em bit.ly/contlink14

Calcula cada um dos seguintes limites:

3.23.1 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(x^5 + 3x + 2\right)$ **3.23.2** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(x^5 - 3x + 2\right)$ **3.23.3** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left(4x^5 - 3x - x^6\right)$

3.23.4 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left(9x - 42x^2 - 2x^3\right)$ **3.23.5** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3+7x}{2-x}$ **3.23.6** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+5x}{x^2+3x+2}$

3.23.7 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^3+9}$ **3.23.8** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{x^2} \times \frac{x^5}{4-2x}\right)$

Resolução:

As alíneas **3.23.2**, **3.23.3** e **3.23.4** utilizaram o Teorema 3.5 na sua resolução:

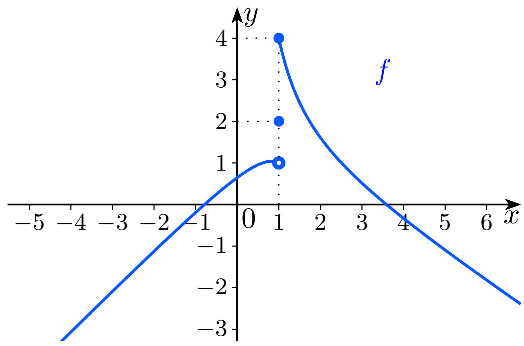
$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(a_0x^n\right).$$

Na figura ao lado está representado parte do gráfico de uma função f.

Seja $\{x_n\}$ a sucessão de termo geral $x_n = 1 + \dfrac{1}{n^3}$.

Com base no gráfico de f podes afirmar que $\lim f(u_n)$ é igual a:

(A) 1 **(B)** 0 **(C)** 2 **(D)** 4



Problema proposto 3.3 — Metas curriculares

Seja (u_n) uma sucessão tal que $\lim u_n = 0$ e $u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Afirma-se que:

(i) $\lim \dfrac{1}{u_n} = +\infty$;

(ii) $\lim \left(u_n \sin \dfrac{\pi}{n^2} \right) = 0$;

(iii) Não existe $\lim \left((-1)^n u_n \right)$.

Então:

(A) (i) e (iii) são falsas

(B) Apenas (ii) e (iii) são verdadeiras

(C) As afirmações são todas verdadeiras

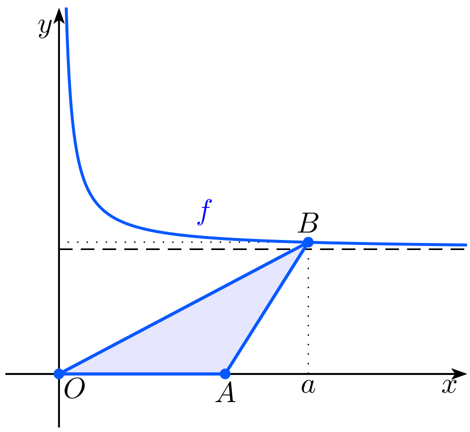
(D) Apenas (iii) é falsa

Problema proposto 3.4

Na figura ao lado está representado parte do gráfico da função f decrescente em $\mathbb{R}^+$ cujo gráfico admite a reta de equação $y = 3$ como assíntota horizontal e um triângulo $[OAB]$. Sabendo que O é a origem do referencial, $A(4, 0)$ e B pertence ao gráfico de f e tem abcissa a podemos concluir que a área do triângulo $[OAB]$ quando a tende para $+\infty$ é:

(A) 4 **(B)** 6

(C) $+\infty$ **(D)** 12



Problema proposto 3.5 — Metas curriculares

Relativamente a uma função f contínua em $[0, 1]$ afirma-se que:

(i) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\left(x^3 - 1 \right) f(x) \right) = 0$;

(ii) f tem um único zero em $[0, 1]$ se $f(0) \times f(1) < 0$;

(iii) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.

Então:

4. Derivadas

4.1 Taxa média de variação

A *taxa média de variação* de uma função real de variável real f no intervalo $[a, b]$ é dada por

$$tmv_{[a,b]} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Em termos físicos, a taxa média de variação corresponde, em linguagem corrente, à velocidade média de f em $[a, b]$.
Em termos gráficos, corresponde ao declive da reta secante ao gráfico da função nos pontos de abcissas a e b.

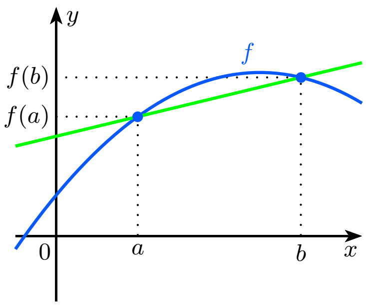


Figura 4.1: Reta secante ao gráfico de f.

Exemplo: Dada a função definida por $f(x) = x^2 - 4$ a taxa média de variação de f no intervalo $[0, 2]$ é dada por

$$tmv_{[0,2]} = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{0 - (-4)}{2 - 0} = 2.$$

Em termos gráficos significa que o declive da reta secante ao gráfico de f nos pontos $(0, f(0))$ e $(2, f(2))$ tem declive 2.

Vídeo: Podes aceder no endereço bit.ly/derivlink1 ao vídeo de exposição da presente secção.

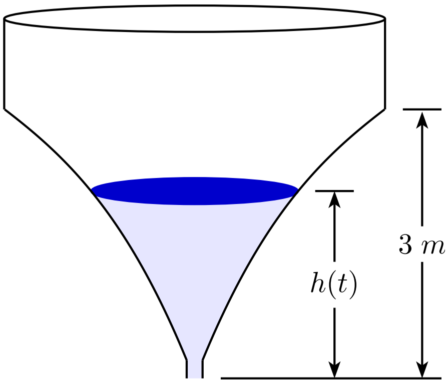
- Define-se *velocidade instantânea de* P no instante $t \in I$ na unidade L/T como $p'(t)$, caso exista.
- Dados dois instantes $t_1 < t_2$ de I, define-se *aceleração média de* P no intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ na unidade L/T^2 como $\dfrac{p'(t_2) - p'(t_1)}{t_2 - t_1}$.
- Define-se *aceleração instantânea de* P no instante $t \in I$ na unidade L/T^2 como $p''(t)$, caso exista.

Exemplo: Uma bola foi lançada verticalmente, no sentido ascendente, a 1 metro do solo. Após $t \in [0, 2.5]$ segundos a distância da bola ao solo, em metros, é dada por $p(t) = 40t - 16t^2 + 1$. Como a sua velocidade no instante t é dada por $v(t) = p'(t) = 40 - 32t$ então a velocidade da bola no instante inicial é $v(0) = 40 - 32 \times 0 = 40$ metros por segundo. Como a sua aceleração no instante t é dada por $a(t) = v'(t) = -32$ então a sua aceleração é sempre igual a -32 metros por segundo ao quadrado.

4.8 Exercícios de escolha múltipla resolvidos

Problema resolvido 4.1

A figura ao lado representa um reservatório com quatro metros de altura. Considera que, inicialmente, o reservatório está cheio de água e que, num certo instante, se abre uma válvula e o reservatório começa a ser esvaziado. O reservatório fica vazio ao fim de doze horas. Admite que a altura, em metros, da água no reservatório, t horas após este ter começado a ser esvaziado, é dada por



$$f(t) = \begin{cases} 4 - \dfrac{t}{3} & \text{se } 0 \leq t < 3 \\ \dfrac{14t - 168}{3t - 51} & \text{se } 3 \leq t \leq 12 \end{cases}$$

4.1.1 Qual é a variação da altura da água no tanque (em metros) entre o instante inicial e após 4 horas?

(A) $\dfrac{4}{3}$ **(B)** $-\dfrac{112}{39}$ **(C)** 12 **(D)** $-\dfrac{44}{39}$

4.1.2 Qual é a variação média da altura da água no tanque (em metros) entre o instante inicial e após 4 horas?

(A) $-\dfrac{4}{3}$ **(B)** $-\dfrac{11}{39}$ **(C)** -12 **(D)** $-\dfrac{44}{39}$

4.1.3 Podemos afirmar que no intervalo $[0, 4]$ a altura da água

(A) diminuiu a uma velocidade de aproximadamente $0.28\ m/s$

(B) aumentou 3 metros

(C) diminuiu a uma velocidade média de aproximadamente $0.28\ m/s$

(D) diminui de uma forma cada vez mais lenta

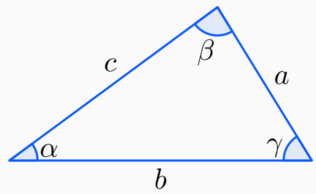
Resolução:

5.2 Lei dos senos e dos cossenos

Teorema 5.1 — Lei dos senos

Num triângulo de ângulos internos α, β e γ, cujos lados opostos medem respetivamente a, b e c tem-se:

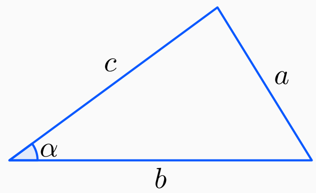
$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}.$$



Teorema 5.2 — Lei dos cossenos - Teorema de Carnot

Num triângulo de lados de medidas a, b e c e com o ângulo α oposto ao lado de medida a tem-se:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$



5.3 Ângulos de referência

α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Tabela 5.1: Tabela trigonométrica dos ângulos de referência

Vídeo: Podes aceder no endereço bit.ly/triglink2 ao vídeo de exposição da presente secção.

5.8 Funções trigonométricas inversas

5.8.1 Arco-seno

Considera-se a restrição principal da função seno $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$. Como é uma função bijetiva então admite inversa. A sua função inversa chama-se *arco-seno* e define-se como

$$\begin{aligned} \arcsin : [-1,1] &\to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x &\mapsto y = \arcsin x \end{aligned}$$

"$\arcsin x$" lê-se o ângulo cujo seno é x e é um ângulo do 1.° ou 4.° quadrantes com amplitude no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Nestas condições verifica-se:

$$\sin x = y \Leftrightarrow x = \arcsin y.$$

O gráfico da função inversa f^{-1} de uma função injetiva f pode obter-se por simetria do gráfico de f relativamente à reta de equação $y = x$. Deste modo, um ponto $(a, f(a))$ do gráfico de f corresponde ao ponto $(f(a), a)$ do gráfico de f^{-1}. O gráfico da função arco-seno é portanto construído a partir do gráfico da restrição da função seno por reflexão segundo a reta $y = x$.
Assim, o gráfico da função arco-seno é o que se apresenta na Figura 5.16.

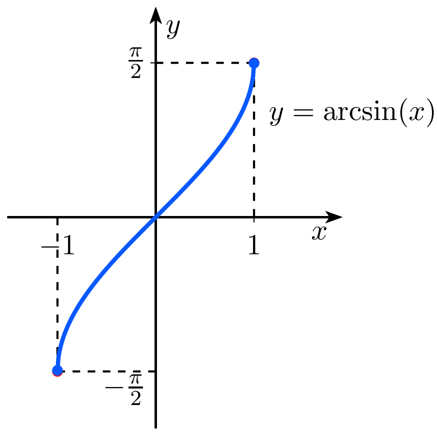


Figura 5.16: Gráfico da função arco-seno.

5.8.2 Arco-cosseno

Considera-se a restrição principal da função cosseno $\cos : [0, \pi] \to [-1,1]$. Como é uma função bijetiva então admite inversa. A sua função inversa chama-se arco-cosseno e define-se como

$$\begin{aligned} \arccos : [-1,1] &\to [0, \pi] \\ x &\mapsto y = \arccos x \end{aligned}$$

"$\arccos x$" lê-se o ângulo cujo cosseno é x e é um ângulo do 1.° ou 2.° quadrantes com amplitude no intervalo $[0, \pi]$. Nestas condições verifica-se:

$$\cos x = y \Leftrightarrow x = \arccos y.$$

O gráfico da função arco-cosseno é construído a partir do gráfico da restrição da função cosseno por reflexão segundo a reta $y = x$. A Figura 5.17 apresenta a representação gráfica da função arco-cosseno.

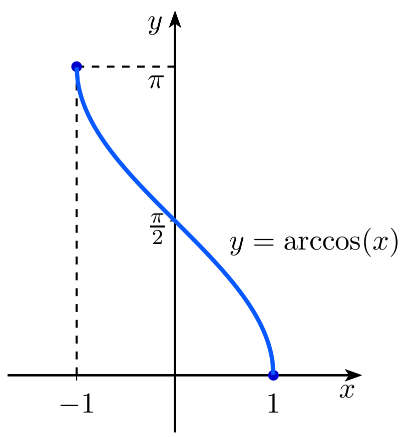


Figura 5.17: Gráfico da função arco-cosseno.

Problema resolvido 5.9

Considera a função definida por $f(x) = e^{\sin x}$. Então, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-1}{\sin(2x)}$ é igual a:

(A) 0 **(B)** 2 **(C)** -2 **(D)** $\dfrac{1}{2}$

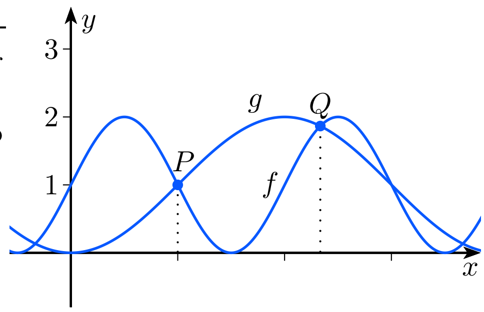
Resolução:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{\sin(2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x}-1}{\sin(2x)} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x}-1}{2\sin x \cos x}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x}-1}{\sin x} \times \lim_{x\to 0} \frac{1}{2\cos x} = \lim_{y\to 0} \frac{e^{y}-1}{y} \times \frac{1}{2} \quad \text{Mudança de variável } \sin x = y$$
$$= 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Podemos concluir que a opção correta é a **(D)**.

Problema resolvido 5.10

Na figura seguinte está representado num referencial ortonormado xOy parte do gráfico das funções definidas por $f(x) = 1 + \sin(2x)$ e $g(x) = 1 - \cos x$.
As abcissas dos pontos P e Q assinalados na figura são respetivamente:



(A) $\dfrac{7}{6}\pi$ e $\dfrac{\pi}{2}$ **(B)** $\dfrac{\pi}{2}$ e $\dfrac{7}{6}\pi$ **(C)** $\dfrac{3}{2}\pi$ e $\dfrac{5}{6}\pi$ **(D)** $\dfrac{\pi}{2}$ e $\dfrac{3}{2}\pi$

Resolução:

Para determinar os pontos de interseção dos dois gráficos vamos resolver a seguinte equação:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 1+\sin(2x) = 1-\cos x \Leftrightarrow \sin(2x) = -\cos x$$
$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \cos(\pi - x) \quad \sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right);\ -\cos\alpha = \cos(\pi-\alpha)$$
$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - 2x = \pi - x + 2k\pi \vee \frac{\pi}{2} - 2x = -(\pi - x) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad \text{ver (5.6)}$$
$$\Leftrightarrow -x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee -3x = -\frac{3}{2}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} - 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como as abcissas dos pontos P e Q assinalados correspondem às primeiras duas soluções positivas da equação anterior valos atribuir valores inteiros a k em cada uma das famílias de soluções para as obter.

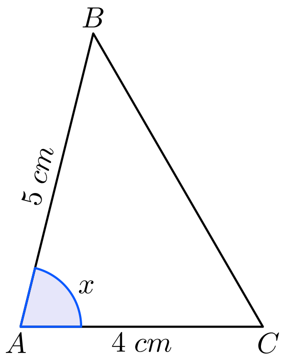
Um outro modo de determinar $\overline{AC}$ é através da Lei dos cossenos.

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB} \times \overline{AC} \cos(30°) \Leftrightarrow 10^2 = 7^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times 7 \times \overline{AC} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 - 7\sqrt{3}\overline{AC} - 51 = 0 \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{7\sqrt{3} \pm \sqrt{147 + 204}}{2}$$
$$\Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{7\sqrt{3} \pm \sqrt{351}}{2} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{7\sqrt{3} \pm 3\sqrt{39}}{2}.$$

O perímetro do triângulo $[ABC]$ é portanto $\left(17 + \frac{7\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{39}}{2}\right)$ cm.

Problema resolvido 5.20 — Vídeo disponível em bit.ly/triglink15

Considera o triângulo da seguinte figura, onde $x \in]0, 180°[$.



5.20.1 Mostra que $\overline{BC} = \sqrt{41 - 40\cos x}$.

5.20.2 Nas alíneas seguintes, considera $\widehat{C} = 60°$.

5.20.2.1 Mostra que $\overline{BC} = 2 + \sqrt{13}$.

5.20.2.2 Mostra que $\cos x = \frac{6-\sqrt{13}}{10}$.

5.20.2.3 Determina $\sin x$.

Resolução:

5.20.1 Pela Lei dos cossenos,

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB} \times \overline{AC} \cos x$$
$$\Leftrightarrow \overline{BC} = \pm\sqrt{16 + 25 - 2 \times 4 \times 5 \cos x}$$
$$\Leftrightarrow \overline{BC} = \pm\sqrt{41 - 40\cos x}$$

Logo $\overline{BC} = \pm\sqrt{41 - 40\cos x}$.

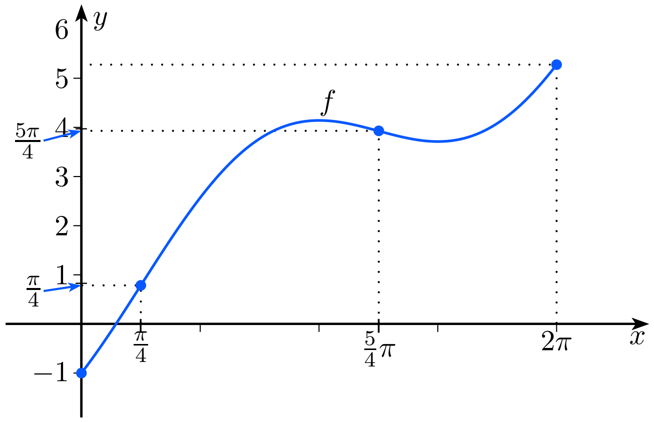
5.20.2.1 Pela Lei dos cossenos,

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{BC} \times \overline{AC} \cos 60° \Leftrightarrow 25 = \overline{BC}^2 + 16 - 2 \times \overline{BC} \times 4 \times \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \overline{BC}^2 - 4\overline{BC} - 9 = 0 \Leftrightarrow \overline{BC} = 2 \pm \sqrt{13}.$$

Como $\overline{BC} > 0$ então $\overline{BC} = 2 + \sqrt{13}$.

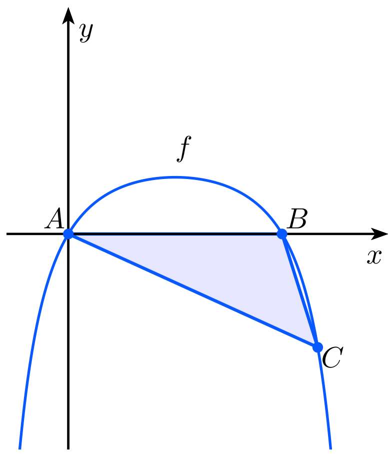
5.20.2.2 Por **5.20.2.1**,

$$\overline{BC}^2 = 41 - 40\cos x \Leftrightarrow 4 + 4\sqrt{13} + 13 = 41 - 40\cos x$$
$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{24 - 4\sqrt{13}}{40} \Leftrightarrow \cos x = \frac{6 - \sqrt{13}}{10}.$$



Problema resolvido 5.51

Seja f a função definida em $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right[$ por $f(x) = \dfrac{\sin x}{1+\sin x}$.



5.51.1 Estuda f quanto à monotonia e determina os seus extremos.

5.51.2 Estuda f quanto à existência de assíntotas do seu gráfico.

5.51.3 Na figura ao lado está representado parte do gráfico de f e o triângulo $[ABC]$. Sabendo que os pontos A, B e C são os pontos do gráfico de f tais que os pontos A e B têm ordenada 0 e que o ponto C tem ordenada -1, determina a área do triângulo.

Resolução:

5.51.1 Para estudar a monotonia de f em $D_f = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right[$ comecemos por determinar $f'(x)$ recorrendo às regras de derivação $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-fg'}{g^2}$, $(f+g)' = f'+g'$ e $(\sin f)' = f' \cos f$:

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{1+\sin x}\right)' = \frac{\cos x(1+\sin x) - \sin x \cos x}{(1+\sin x)^2}$$
$$= \frac{\cos x + \cos x \sin x - \sin x \cos x}{(1+\sin x)^2} = \frac{\cos x}{(1+\sin x)^2}.$$

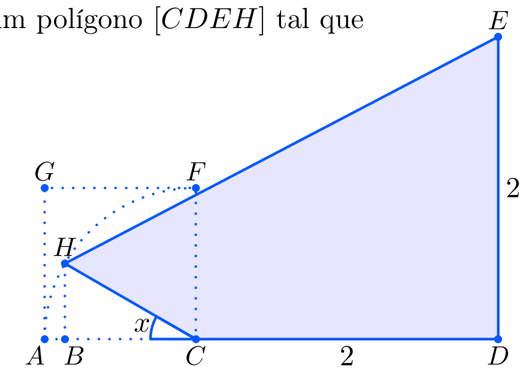
Deste modo,

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\cos x}{(1+\sin x)^2} = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \wedge (1+\sin x)^2 \neq 0$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \wedge \sin x \neq -1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Problema resolvido 5.52 — Adaptado de exame

Na figura seguinte está representado a sombreado um polígono $[CDEH]$ tal que

- $[ACFG]$ é um quadrado de lado 1;
- $\overline{CD} = \overline{DE} = 2$;
- $\widehat{AHF}$ é um arco de circunferência e o ponto H desloca-se neste arco de tal forma que se verifica sempre que $[HB] \perp [AC]$;
- x designa a amplitude em radianos do ângulo $B\widehat{C}H$;



5.52.1 Mostra que a área do polígono $[CDEH]$ é dada em função de x por $A(x) = \sin x + \cos x + 2$ para $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

5.52.2 Determina o valor de x para o qual a área é máxima. Calcula o valor da área máxima.

5.52.3 Calcula $A(0)$ e $A\left(\frac{\pi}{2}\right)$ e enquadra os valores obtidos no contexto do problema.

Resolução:

5.52.1 Vamos determinar a área do polígono $[CDEH]$ através da seguinte igualdade:

$$A_{[CDEH]} = A_{[BDEH]} - A_{[BCH]}.$$

Tendo em consideração as definições das razões trigonométricas de um ângulo agudo (ver secção 5.1) temos

$$\sin x = \frac{\overline{BH}}{\overline{CH}} \Leftrightarrow \sin x = \frac{\overline{BH}}{1} \Leftrightarrow \overline{BH} = \sin x.$$

$$\cos x = \frac{\overline{BC}}{\overline{CH}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\overline{BC}}{1} \Leftrightarrow \overline{BC} = \cos x.$$

Deste modo, como $[BDEH]$ é um trapézio temos

$$\begin{aligned} A_{[BDEH]} &= \frac{B+b}{2} \times h = \frac{\overline{DE} + \overline{BH}}{2} \times \overline{BD} \\ &= \frac{2+\sin x}{2} \times (2+\cos x) = \frac{4 + 2\cos x + 2\sin x + \sin x \cos x}{2}. \end{aligned}$$

A área do triângulo $[BCH]$ é

$$A_{[BCH]} = \frac{B \times h}{2} = \frac{\overline{BC} \times \overline{BH}}{2} = \frac{\cos x \times \sin x}{2}.$$

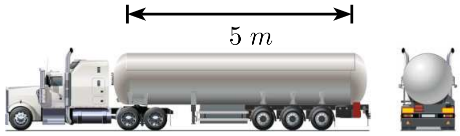
Por último, a área do polígono $[CDEH]$ é

$$A_{[CDEH]} = \frac{4 + 2\cos x + 2\sin x + \sin x \cos x}{2} - \frac{\cos x \times \sin x}{2} = 2 + \cos x + \sin x$$

e ficou provado o pretendido.

Problema resolvido 5.53

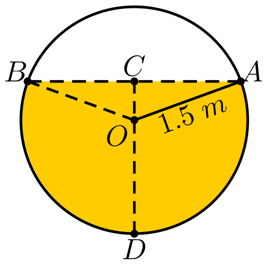
Um tanque de transporte de gasolina tem a forma de cilindro com 1.5 m de raio e 5 m de comprimento. Na figura em baixo mostram-se diferentes perspetivas do camião e uma secção do cilindro quando o tanque já não está cheio.



5.53.1 Qual é o valor de $\overline{CD}$ se o depósito estiver cheio?

5.53.2 Calcula a área do rectângulo do plano da superfície da gasolina dentro do tanque quando $\overline{CD} = 2\ m$. Faz o mesmo para $\overline{CD} = 1\ m$.

5.53.3 Calcula a área do rectângulo do plano da superfície da gasolina dentro do tanque em função de x, onde $x = D\hat{O}A$. Entre que valores varia x?



Resolução:

5.53.1 Se o depósito estiver cheio temos $\overline{CD} = 3\ m$ uma vez que este é o diâmetro do círculo.

5.53.2 A Figura 5.28 ao lado ilustra a secção do cilindro quando $\overline{CD} = 2\ m$.
Pelo Teorema de Pitágoras temos

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 + \overline{CO}^2 = \overline{AO}^2 &\Leftrightarrow \overline{AC}^2 + 0.5^2 = 1.5^2 \\ &\Leftrightarrow \overline{AC} = \pm\sqrt{2.25 - 0.25} \\ &\Leftrightarrow \overline{AC} = \pm\sqrt{2}. \end{aligned}$$

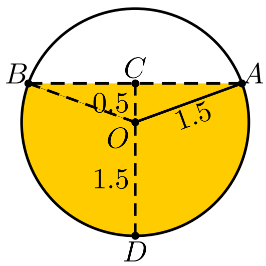


Figura 5.28: Secção quando $\overline{CD} = 2\ m$

Deste modo, a superfície do rectângulo do plano da superfície da gasolina dentro do tanque tem dimensões $2\sqrt{2}\ m \times 5\ m$ e a sua área é $10\sqrt{2}\ m^2$.
A Figura 5.29 ao lado ilustra a secção do cilindro quando $\overline{CD} = 1\ m$.
Se $\overline{CD} = 1\ m$, como $\overline{OD} = 1.5\ m$ então $\overline{OC} = 0.5\ m$.
De forma análoga, pelo Teorema de Pitágoras temos $\overline{AC} = \sqrt{2}\ m$.
Deste modo, a superfície do rectângulo do plano da superfície da gasolina dentro do tanque tem dimensões $2\sqrt{2}\ m \times 5\ m$ e a sua área é $10\sqrt{2}\ m^2$. É portanto a mesma área que no caso anterior.

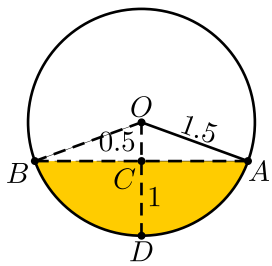


Figura 5.29: Secção quando $\overline{CD} = 1\ m$

6. Funções exponencial e logarítmica

6.1 Juros compostos e número de Neper

Proposição 6.1 — Juros compostos
Sejam r um números real, T uma unidade de medida temporal e $n \in \mathbb{N}$. Dado um capital inicial C_0 aplicado com juros compostos a uma taxa de juro de $r\%$ a T, o capital disponível ao fim de n períodos de tempo T é igual a $C_n = C_0 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$.

Exemplo: Dado um capital inicial de 1000 euros aplicado com juros compostos a uma taxa de juro de 3% ao ano, o capital disponível ao fim de 5 anos é igual a $C_5 = 1000 \left(1 + \frac{3}{100}\right)^5 \approx 1159.27$.

Definição 6.1
Designa-se por *número de Neper* e representa-se por e o limite da sucessão $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$:

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Nota: $\lim \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k$ e $\lim \left(1 + \frac{k}{v_n}\right)^{v_n} = e^k$, para $k \in \mathbb{R}$ e v_n uma sucessão tal que $\lim v_n = \pm\infty$.

Exemplo: $\lim \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n = e^3$ e $\lim \left(1 + \frac{2}{n^2+1}\right)^{n^2+1} = e^2$.

$$\ln\sqrt{e}+\ln\frac{1}{e}+\log_2 e=\ln e^{\frac{1}{2}}+\ln e^{-1}+\frac{\ln e}{\ln 2} \qquad \sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}};\ \ a^{-1}=\frac{1}{a};\ \ \log_a x=\frac{\ln x}{\ln a}$$

$$=\frac{1}{2}-1+\frac{1}{\ln 2} \qquad \log_a a^x=x$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{\ln 2}.$$

Podemos concluir que a opção correta é a **(A)**.

Problema resolvido 6.7

Se $\ln x=1+\ln y$, $x>0$, $y>0$ então:

(A) $\frac{x}{y}=e$ **(B)** $\frac{x}{y}=1$ **(C)** $x=1+y$ **(D)** $x=y$

Resolução:

$$\ln x=1+\ln y \Leftrightarrow \ln x-\ln y=1$$

$$\Leftrightarrow \ln\frac{x}{y}=1 \qquad \log_a x-\log_a y=\log_a\frac{x}{y}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{y}=e. \qquad \text{Definição de logaritmo: } \log_a x=y\Leftrightarrow x=a^y$$

Podemos concluir que a opção correta é a **(A)**.

Problema resolvido 6.8

O conjunto solução da equação $\ln(x-3)+\ln(x-1)=3\ln 2$ é:

(A) $\{6\}$ **(B)** $\{-1,5\}$ **(C)** $\{1,3\}$ **(D)** $\{5\}$

Resolução:

O domínio da condição é $D=\{x\in\mathbb{R}: x-3>0\wedge x-1>0\}=]3,+\infty[$.

$$\ln(x-3)+\ln(x-1)=3\ln 2$$

$$\Leftrightarrow \ln\left((x-3)(x-1)\right)=\ln 2^3 \qquad \log_a x+\log_a y=\log_a(xy);\ \ n\log_a x=\log_a x^n$$

$$\Leftrightarrow x^2-x-3x+3=8\wedge x\in D \qquad \text{Propriedade 6.5}$$

$$\Leftrightarrow x^2-4x-5=0\wedge x\in D$$

$$\Leftrightarrow (x=-1\vee x=5)\wedge x\in D$$

$$\Leftrightarrow x=5.$$

Problema resolvido 6.12

Seja f uma função definida por $f(x) = e^{\cos x}$ e g uma função tal que $g(\pi) = \frac{5}{6}\pi$ e $g'(\pi) = -2e^{\sqrt{3}}$. Então $(f \circ g)'(\pi)$ é:

(A) $\frac{3}{2}$ **(B)** $e^{\frac{-\sqrt{3}}{2}}$ **(C)** $-\frac{3}{2}$ **(D)** $e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

Resolução:

O Teorema da derivada da função composta (Teorema 4.3) garante-nos que $(f \circ g)'(\pi) = g'(\pi) \times f'(g(\pi))$.

Pelas regras de derivação $\left(e^f\right)' = f'e^f$ e $(\cos f)' = -f' \sin f$ temos que

$$f'(x) = (e^{\cos x})' = (\cos x)' e^{\cos x} = -\sin x e^{\cos x}.$$

Deste modo

$$\begin{aligned} g'(\pi) \times f'(g(\pi)) &= -2e^{\sqrt{3}} \times f'\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -2e^{\sqrt{3}} \times \left(-\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)\right) e^{\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right)} \\ &= -2e^{\sqrt{3}} \times \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = e^{\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}} = e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}. \end{aligned}$$

Podemos concluir que a opção correta é a **(D)**.

6.7 Exercícios de desenvolvimento resolvidos

Problema resolvido 6.13 — Metas curriculares

O capital acumulado M, por um capital C, que é investido durante t anos a uma taxa anual nominal $r\%$, com capitalizações n vezes por ano é dado pela fórmula:

$$M = C\left(1 + \frac{r}{100n}\right)^{nt}.$$

Calcula o capital acumulado ao fim de 4 anos e 5 meses por um capital de 5000 euros, calculado a uma taxa anual nominal de 4% com:

6.13.1 capitalizações anuais;

6.13.2 capitalizações trimestrais;

6.13.3 capitalizações mensais;

6.13.4 capitalizações contínuas.

Resolução:

Como 5 meses é igual a $\frac{5}{12}$ anos, então 4 anos e 5 meses são $\left(4 + \frac{5}{12}\right) = \frac{53}{12}$ anos.

6.13.1 $M = 5000\left(1 + \frac{4}{100}\right)^{\frac{53}{12}} \approx 5945.67$.

O capital acumulado é de aproximadamente 5945.67 euros.

6.13.2 $M = 5000\left(1 + \frac{4}{100 \times 4}\right)^{4 \times \frac{53}{12}} \approx 5960.13$.

O capital acumulado é de aproximadamente 5960.13 euros.

6.13.3 Neste caso temos

Problema resolvido 6.17 — Vídeo disponível em bit.ly/exploglink10

Calcula:

6.17.1 $\log_2 16$ **6.17.2** $\log_{10} 100$ **6.17.3** $\log_5 125$ **6.17.4** $\log_2 64$

6.17.5 $\log_3 \frac{1}{9}$ **6.17.6** $\log_3 81$ **6.17.7** $\log_3 243$ **6.17.8** $\log_3 1$

6.17.9 $\log_3 \frac{1}{81}$ **6.17.10** $\log_2 \sqrt{2}$ **6.17.11** $\log_2 \sqrt{4}$ **6.17.12** $\log_2 \frac{1}{\sqrt{2}}$

6.17.13 $\log_2 2^{\frac{3}{5}}$ **6.17.14** $\log_2 \left(\sqrt{8}\right)^5$ **6.17.15** $\ln e^5$ **6.17.16** $\ln \sqrt[3]{e}$

6.17.17 $\ln \frac{1}{\sqrt{e}}$ **6.17.18** $\ln \frac{\sqrt[3]{e}}{e}$ **6.17.19** $\log 1000$ **6.17.20** $\log \sqrt{10^{-3}}$

Resolução:

Vamos começar por utilizar a definição de logaritmo:

$$\boxed{\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y, \text{ para } a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}}$$

6.17.1 $\log_2 16 = y \Leftrightarrow 2^y = 16 \Leftrightarrow 2^y = 2^4 \Leftrightarrow y = 4.$

6.17.2 $\log_{10} 100 = y \Leftrightarrow 10^y = 100 \Leftrightarrow 10^y = 10^2 \Leftrightarrow y = 2.$

6.17.3 $\log_5 125 = y \Leftrightarrow 5^y = 125 \Leftrightarrow 5^y = 5^3 \Leftrightarrow y = 3.$

6.17.4 $\log_2 64 = y \Leftrightarrow 2^y = 64 \Leftrightarrow 2^y = 2^6 \Leftrightarrow y = 6.$

6.17.5 $\log_3 \frac{1}{9} = y \Leftrightarrow 3^y = \frac{1}{9} \Leftrightarrow 3^y = 3^{-2} \Leftrightarrow y = -2.$

6.17.6 $\log_3 81 = y \Leftrightarrow 3^y = 81 \Leftrightarrow 3^y = 3^4 \Leftrightarrow y = 4.$

Apliquemos agora a seguinte propriedade:

$$\boxed{\log_a a^y = y, \text{ para } a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}}$$

6.17.1 $\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$

6.17.2 $\log_{10} 100 = \log_{10} 10^2 = 2$

6.17.3 $\log_5 125 = \log_5 5^3 = 3.$

6.17.4 $\log_2 64 = \log_2 2^6 = 6.$

6.17.5 $\log_3 \frac{1}{9} = \log_3 3^{-2} = -2.$

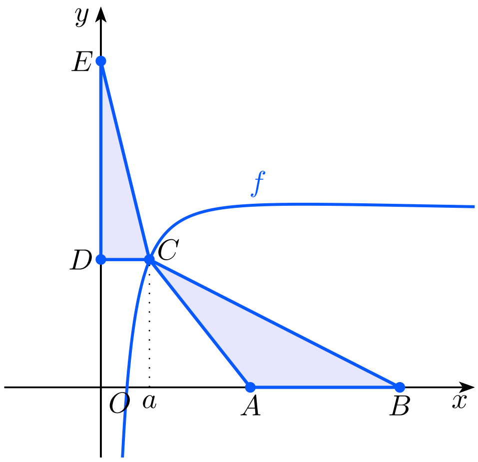
6.17.6 $\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4.$

6.17.7 $\log_3 243 = \log_3 3^5 = 5.$

6.17.8 $\log_3 1 = \log_3 3^0 = 0.$

6.17.9 $\log_3 \frac{1}{81} = \log_3 3^{-4} = -4.$

- o ponto A tem coordenadas $(2,0)$;
- o ponto B tem coordenadas $(4,0)$;
- o ponto C pertence ao gráfico de f e tem de abcissa a, onde $a \in]0,+\infty[$;
- o ponto B tem coordenadas $(2,0)$;
- o ponto D pertence ao eixo Oy e tem a mesma ordenada que C;
- o ponto E tem coordenadas $(0,6)$.



6.55.1 Mostra que as áreas dos triângulos $[ABC]$ e $[CDE]$ são dadas, em função de a, por

$$A_{[ABC]} = f(a) \text{ e } A_{[CDE]} = \frac{a(6-f(a))}{2}.$$

6.55.2 Mostra analiticamente que existe um valor de a no intervalo $]1,3[$ para o qual os triângulos $[ABC]$ e $[CED]$ têm áreas iguais e, recorrendo à calculadora gráfica, determina a sua aproximação às centésimas.

6.55.3 Calcula $\lim\limits_{a\to+\infty} f(a)$ e interpreta o valor obtido no contexto do gráfico de f e da área do triângulo $[ABC]$.

6.55.4 Determina, recorrendo a processos exclusivamente analíticos, o valor de a para o qual a área do triângulo $[ABC]$ é máxima. Determina o valor máximo da área.

Resolução:

6.55.1 As áreas dos triângulos $[ABC]$ e $[CDE]$ são dadas em função de a por:

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB}\times f(a)}{2} = \frac{2f(a)}{2} = f(a) \quad \text{e} \quad A_{[CDE]} = \frac{\overline{CD}\times\overline{DE}}{2} = \frac{a(6-f(a))}{2}.$$

6.55.2 Para as áreas serem iguais tem que se verificar a seguinte igualdade:

$$f(a) = \frac{a(6-f(a))}{2} \Leftrightarrow f(a) - \frac{a(6-f(a))}{2} = 0.$$

Seja g a função definida por $g(a) = f(a) - \dfrac{a(6-f(a))}{2}$.
Provar o que é pedido equivale a provar que g tem pelo menos um zero em $]1,3[$.
f é contínua em $]0,+\infty[$ por ser a soma e quociente de funções contínuas.
Como g é a diferença, produto e divisão de funções contínuas então também é contínua em $]0,+\infty[$.
Logo g é em particular contínua em $[1,3]$.
Como $f(2) = \dfrac{\ln 1 + 6}{2} = 3$ e $f(3) = \dfrac{\ln 3 + 9}{3}$ então

- $g(1) = 3 - \dfrac{6-3}{2} = \dfrac{3}{2} > 0$;

6.41.3 Calcula $\lim_{t\to+\infty} C(t)$ e interpreta o seu valor no contexto do problema.

Problema proposto 6.42

Uma catenária é a forma que um cabo assume quando é suportado pelas suas pontas e sofre apenas a ação do seu peso. Uma força aplicada em qualquer ponto da curva é dividido igualmente por toda a curva. Por esse motivo é usada desde a antiguidade para a construção de arcos nos monumentos. Atualmente é especialmente utilizada na engenharia civil e na arquitetura. A figura seguinte mostra o arco de Saint Louis nos Estados Unidos que representa uma catenária invertida quase perfeita. Considera que os pontos de ordenada não negativa do gráfico da função definida por

$$f(x) = -20\left(e^{\frac{x}{40}} + e^{-\frac{x}{40}}\right) + 230$$

num referencial ortonormado representam o arco, com as unidades em metros.

6.42.1 Sabendo que o eixo dos xx representa o solo, utiliza as potencialidades da calculadora gráfica para obter, com aproximação às décimas, o domínio da função no contexto do problema e o gráfico de f.

6.42.2 Determina, com base na alínea anterior, a distância entre os dois "pés" do arco com aproximação às décimas.

6.42.3 Determina, por processos exclusivamente analíticos, o máximo absoluto de f e interpreta o valor obtido no contexto do problema.

Problema proposto 6.43

Seja g a função real de variável real definida por

$$g(x) = \begin{cases} xe^{\frac{1}{x}} & \text{se } x < 0 \\ e^x - 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

6.43.1 Mostra que g é contínua para $x = 0$ e que não tem derivada neste ponto.

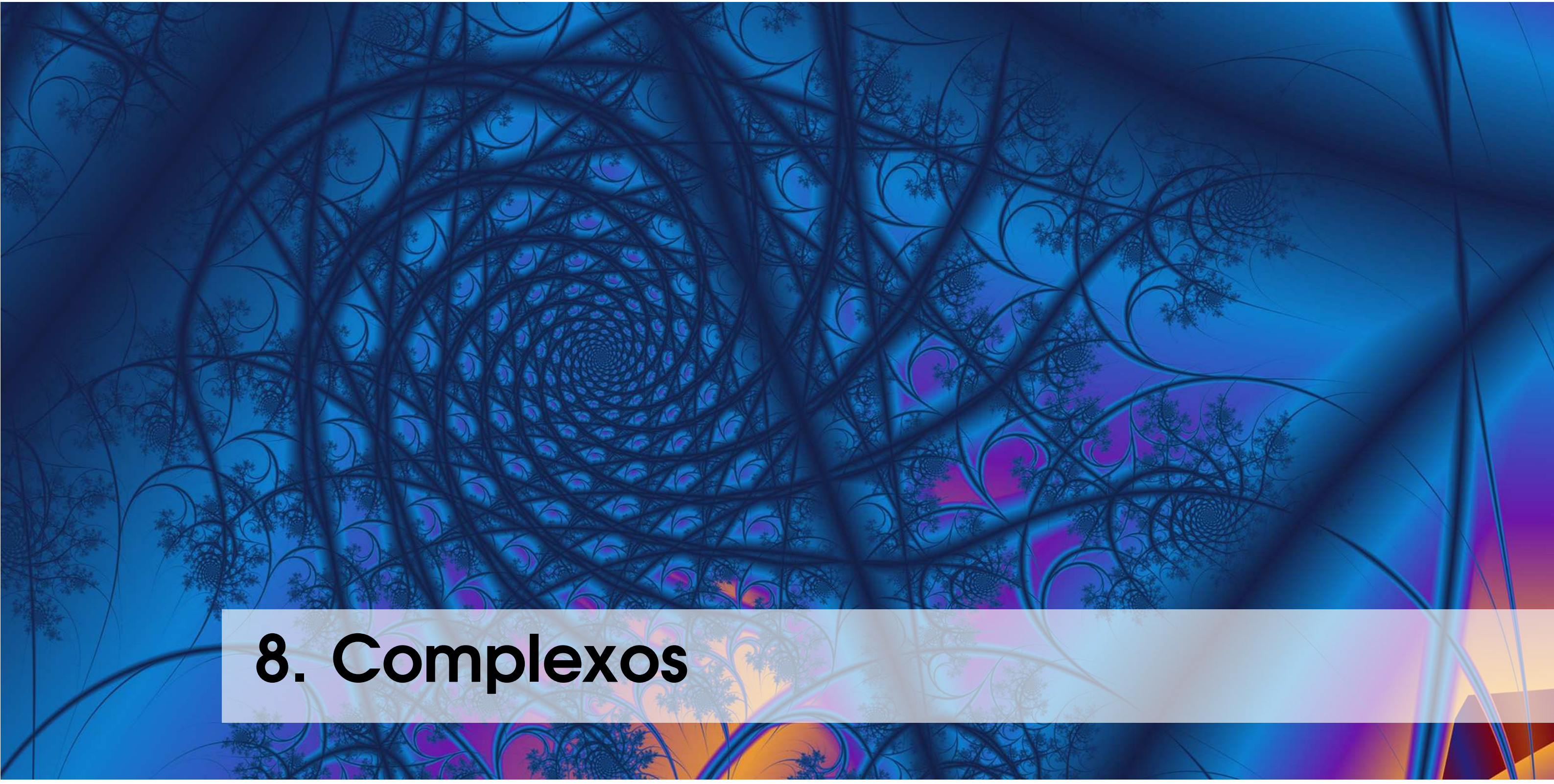
6.43.2 Carateriza g'.

6.43.3 Poderás garantir pelo Teorema de Lagrange que $\exists c \in]-1,1[: f'(c) = \dfrac{f(1)-f(-1)}{2}$?

6.43.4 Estuda g quanto ao sentido de variação.

6.43.5 Determina a equação da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 1.

6.43.6 Calcula $\lim_{x\to 1} \dfrac{g(x)\,[g(x)-g(1)]}{x-1}$.



8. Complexos

8.1 Corpo dos números complexos

Definição 8.1 — Corpo dos números complexos
Dados (a,b), $(c,d) \in \mathbb{R}^2$, define-se operação aditiva «$+$» e multiplicativa «$\times$» por $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$ e $(a,b)\times(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$. O conjunto $\mathbb{R}^2$, quando munido destas duas operações designa-se corpo dos números complexos e representa-se por $\mathbb{C}$.

- As operações «$+$» e «$\times$» são associativas, comutativas.
- $(0,0)$ e $(1,0)$ são os elementos neutros de «$+$» e «$\times$» respetivamente.
- «$\times$» é distributiva em relação a «$+$».
- Dados $(a,0)$, $(c,0) \in \mathbb{R}^2$, como $(a,0)+(c,0)=(a+c,)$ e $(a,0)\times(c,0)=(ac,0)$ então $\mathbb{R}$ é um subconjunto de $\mathbb{C}$.
- Associamos a cada $x \in \mathbb{R}$ o par ordenado $(x,0) \in$ e representamos o número complexo $(x,0)$ por x.

Definição 8.2 — unidade imaginária
Representamos o número complexo $(0,1)$ por i e designamo-lo por *unidade imaginária.*
$i^2=-1$.

8.2 Forma algébrica de um número complexo

Definição 8.3 — Forma algébrica dos números complexos
Um número complexo é da forma $x+yi$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ e $i=\sqrt{-1}$ é a unidade imaginária.
O conjunto de todos os números complexos é

$$\mathbb{C}=\{x+yi \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}.$$

Algorítmo 8.1 — Representação de um complexo na forma trigonométrica
Dado um número complexo na forma algébrica $x+yi$, para o representar na forma trigonométrica devemos seguir os seguintes passos:

(i) Representar o número complexo no plano de Argand;

(ii) Determinar o seu argumento principal com base na Figura 8.4;

(iii) Calcular o seu módulo $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$;

(iv) Escrever a conclusão: $x+yi = \rho e^{i\theta}$.

Exemplo: Na Figura 8.5 está representado o complexo $1+\sqrt{3}i$ no plano de Argand.
Como o afixo de $1+\sqrt{3}i$ pertence ao 1.° quadrante, pela Figura 8.4 temos

$$\theta = \tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}.$$

Como $|1+\sqrt{3}i| = \sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$ e $\theta = \frac{\pi}{3}$ então

$$1+\sqrt{3}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

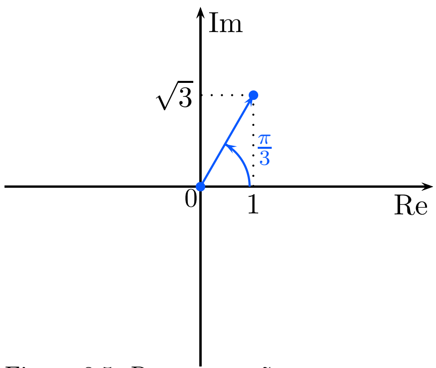


Figura 8.5: Representação geométrica do complexo $1+\sqrt{3}i$.

Proposição 8.4 — Igualdade, conjugado e simétrico de um complexo na forma trigonométrica
Sejam $z_1 = \rho_1 e_1^{i\theta}$ e $z_2 = \rho_2 e_2^{i\theta}$ dois números complexos. Então,

- $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \rho_1 = \rho_2 \wedge \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.
- Se $z = \rho e^{i\theta}$ então $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$ e $-z = \rho e^{i(\pi+\theta)}$.

Exemplo: Sejam $z_1 = 4e^{i\frac{\pi}{3}}$ e $z_2 = 2re^{i\alpha}$.
Então,

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow 2r = 4 \wedge \alpha = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow r = 2 \wedge \alpha = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Por outro lado, $\overline{z_1} = 4e^{-i\frac{\pi}{3}}$ e $-z_1 = 4e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)} = 4e^{i\frac{4}{3}\pi}$.

Vídeo: Podes aceder no endereço bit.ly/complexoslink2 ao vídeo de exposição da presente secção.

8.6 Operações com números complexos na forma trigonométrica

Podemos efetuar as operações de multiplicação, potenciação e divisão de números complexos diretamente a partir da sua forma trigonométrica. As vantagens incluem a simplicidade e enquadramento geométrico.

Resolução:

De acordo com a Proposição 8.10 as raízes cúbicas de $w = \rho e^{i\alpha}$ são dadas por

$$z_k = \sqrt[3]{\rho} e^{i\left(\frac{\alpha+2k\pi}{3}\right)},\ k \in \{0,1,2\}.$$

Temos portanto $z_0 = \sqrt[3]{\rho} e^{i\frac{\alpha}{3}}$, $z_1 = \sqrt[3]{\rho} e^{i\frac{\alpha+2\pi}{3}}$ e $z_2 = \sqrt[3]{\rho} e^{i\frac{\alpha+4\pi}{3}}$.
Assim, pela Proposição 8.5 temos

$$z_0 \times z_1 \times z_2 = \left(\sqrt[3]{\rho}\right)^3 e^{\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{\alpha+2\pi}{3}+\frac{\alpha+4\pi}{3}\right)} = \rho e^{2i\pi} = \rho.$$

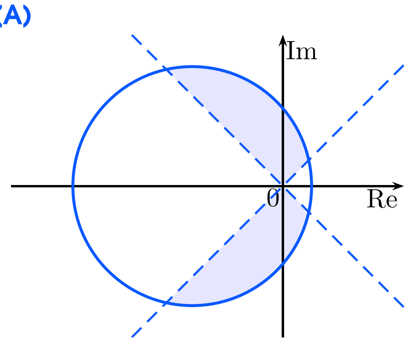
A resposta correta é a **(D)**.

Problema resolvido 8.11

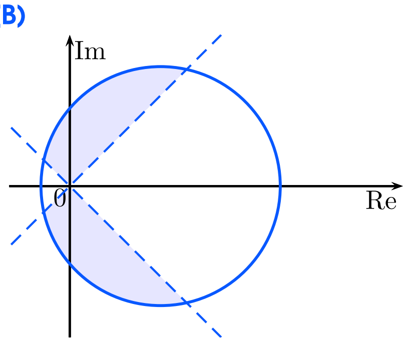
Qual das seguintes regiões representa a condição em $\mathbb{C}$

$$|z-3| \leq 4 \wedge \operatorname{Re}\left(z^2\right) \leq 0?$$

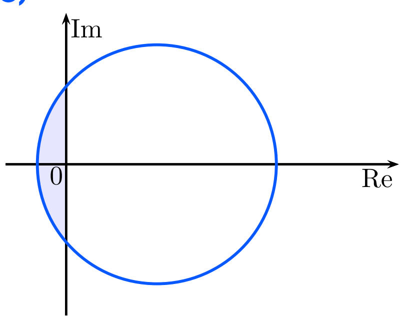
(A)



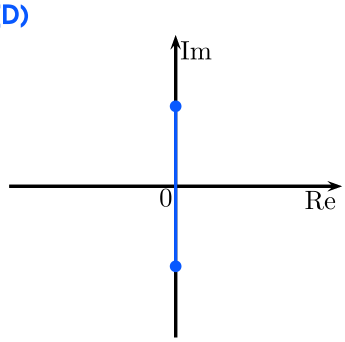
(B)



(C)



(D)



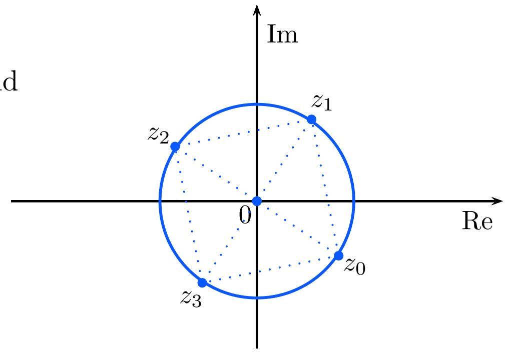
Resolução:

Como a condição $|z-3| \leq 4 \Leftrightarrow |z-(3+0i)| \leq 4$ representa os pontos interiores ou na circunferência centrada no ponto $(3,0)$ e raio 4 então a hipótese **(A)** é afastada.
Uma vez que a condição $\operatorname{Re}\left(z^2\right) \leq 0$ não se enquadra com nenhum dos tipos de condições apresentados na Secção 8.7 então vamos substituir z por $x+yi$ e desenvolver a condição:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re}\left((x+yi)^2\right) \leq 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}\left(x^2+2xyi-y^2\right) \leq 0 \Leftrightarrow x^2-y^2 \leq 0 \\
\Leftrightarrow &(x-y)(x+y) \leq 0 \Leftrightarrow (x-y \geq 0 \wedge x+y \leq 0) \vee (x-y \leq 0 \wedge x+y \geq 0) \\
\Leftrightarrow &\left(y \leq x \wedge y \leq -x\right) \vee \left(y \geq x \wedge y \geq -x\right).
\end{aligned}$$

Problema proposto 8.4

Na figura seguinte estão representadas no plano de Argand as raízes quartas de um número complexo w.
Qual é o valor de $\frac{z_1}{z_0} + z_1 + z_3$?

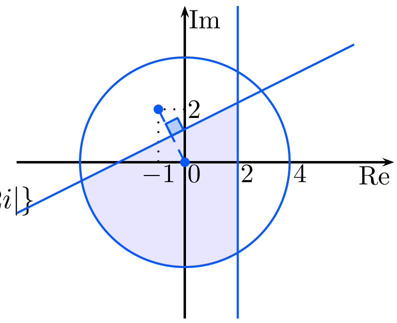


(A) i **(B)** -1

(C) $-i$ **(D)** 1

Problema proposto 8.5

Seja P o conjunto de números complexos cujas imagens no plano de Argand formam a região a sombreado na figura.
Qual das seguintes afirmações pode ser verdadeira?



(A) $P = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 4 \wedge \operatorname{Re}(z) \leq 2 \wedge |z| \geq |z+1-2i|\}$

(B) $P = \left\{z \in \mathbb{C} : -\frac{14}{15}\pi \leq \arg\left(z - 2 + \frac{9}{2}i\right) \leq -\frac{\pi}{2}\right\}$

(C) $P = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 4 \wedge \operatorname{Re}(z+3-2i) \leq 5 \wedge |z| \leq |z+1-2i|\}$

(D) $P = \left\{z \in \mathbb{C} : -\frac{14}{15}\pi \leq \arg\left(z - 2 - \frac{9}{2}i\right) \leq \frac{3}{2}\pi\right\}$

Problema proposto 8.6

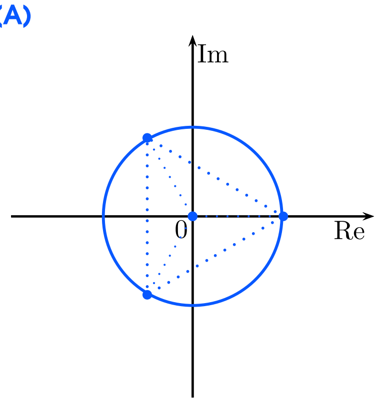
Seja z uma raiz índice 6 de um complexo w.
Qual dos seguintes números é igual a $z^6 \times \overline{w}$?

(A) w^2 **(B)** 0 **(C)** 1 **(D)** $|w|^2$

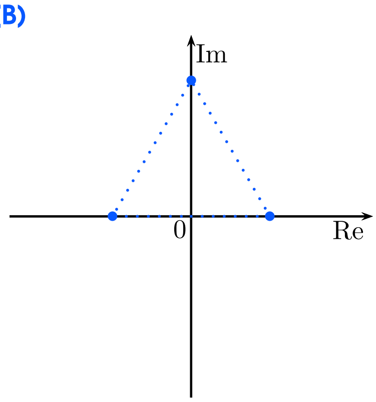
Problema proposto 8.7

Seja z um complexo cujo afixo pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares. Qual das seguintes figuras pode representar as raízes cúbicas de z?

(A)



(B)



9. Lógica e conjuntos

Proposição 9.1 — Princípios e lei

- princípio da não contradição: uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo, isto é $p \wedge \sim p \Leftrightarrow f$.
- princípio do terceiro excluído: uma proposição ou é verdadeira ou é falsa, isto é $p \vee \sim p \Leftrightarrow v$.
- lei da dupla negação: $\sim\sim p \Leftrightarrow p$.

Nota teórica 2 — Operações lógicas

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	$\sim p$
V	F
F	V

Tabela 9.1: Tabelas de verdade da conjunção, da disjunção e da negação

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Tabela 9.2: Tabelas de verdade da implicação e da equivalência

Nota teórica 8 — Terminologia e resultados de conjuntos
Podes encontrar na Secção 1.1 Terminologia e resultados de conjuntos.

9.1 Problemas resolvidos

Problema resolvido 9.1
Consideremos no universo $U = \left\{-\sqrt{25}, -3, \pi, \sqrt{7}, \frac{8}{2}, \frac{7}{2}\right\}$ os conjuntos $A = \{\sqrt{7}, -3\}$, $B = \{-3, \pi, 4, \sqrt{7}\}$, $C = \{4, \pi\}$ e $D = \left\{4, \frac{7}{2}\right\}$.

9.1.1 Preenche cada um dos espaços com os símbolos $\in$, $\notin$, $\subset$, $\supset$, $\not\subset$ ou $=$:

(a) $-\sqrt{9}....A$; (b) $\pi....U$; (c) $C....B$; (d) $\varnothing....D$.
(e) $\varnothing....D$; (f) $5....D$; (g) $B....C$; (h) $U....B$.

9.1.2 Representa cada um dos seguintes conjuntos em extensão e indica o seu cardinal.

(a) $A \cup C$; (b) $C \cap \overline{D}$; (c) $\overline{A} \cup \overline{C}$; (d) $A \times D$.

9.1.2 Indica os elementos de U que pertencem aos conjuntos $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ e os que são números irracionais.

Resolução: Ver resolução no documento digital anexo ao livro. Solução na página 529.

Problema resolvido 9.2
Considera as proposições:
p: "um quadrado é um retângulo";
q: "um retângulo é um quadrado";
r: "um triângulo retângulo pode ser isósceles ou escaleno";
Traduz em linguagem corrente as seguintes proposições e indica, **justificando**, o seu valor lógico.

9.2.1 $p \wedge q$;

9.2.2 $p \vee \sim r$;

9.2.3 $\sim (q \Rightarrow r)$.

Resolução: Ver resolução no documento digital anexo ao livro. Solução na página 529.

Problema resolvido 9.3
Prova, recorrendo a uma tabela de verdade, que $p \Rightarrow (\sim q) \Leftrightarrow \sim p \vee (\sim q)$.

Resolução: Ver resolução no documento digital anexo ao livro. Solução na página 529.

- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}$.
- $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}$.
- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Nota teórica 9 — Racionalização de denominadores
Podemos racionalizar os denominadores com as regras seguintes:

- denominadores da forma $a\sqrt[n]{b}$ ($a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $b, n \in \mathbb{N}$): multiplica-se o denominador por $\sqrt[n]{b^{n-1}}$;
- denominadores da forma $a\sqrt[n]{b^p}$ ($a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $b, n, p \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < n$): multiplica-se o denominador por $\sqrt[n]{b^{n-p}}$;
- denominadores da forma $a\sqrt{b} + c\sqrt{d}$ ($a, c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $b, d \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < n$): multiplica-se o denominador por $a\sqrt{b} + c\sqrt{d}$ (expressão conjugada).

10.1 Problemas resolvidos

Problema resolvido 10.1
Simplifica cada uma das seguintes expressões numéricas:

10.1.1 $3\sqrt{3} - \sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 5\sqrt{3}$; **10.1.2** $5\sqrt{27} - 4\sqrt{3}$ **10.1.3** $\sqrt{20} + 2\sqrt{5} - 3\sqrt{180}$

10.1.4 $\dfrac{\sqrt{2}}{3} - \dfrac{3\sqrt{18}}{2}$ **10.1.5** $\sqrt[3]{54} + 2\sqrt[3]{3}$; **10.1.6** $\sqrt[5]{64} - 3\sqrt[5]{2}$

10.1.7 $\sqrt[3]{250} + 2\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{16}$ **10.1.8** $\left(\sqrt[3]{16}\right)^3 - \dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt{8}}$ **10.1.9** $\sqrt[5]{21} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[15]{3^7} - \frac{\sqrt[5]{7}}{2}$

10.1.10 $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}} + 3\sqrt[18]{4}$ **10.1.11** $\dfrac{2}{\sqrt[3]{4}} + 3\sqrt[9]{8}$ **10.1.12** $\dfrac{\sqrt{28 - 16\sqrt{3}}}{\sqrt[3]{24}}$

Resolução: Ver resolução no documento digital anexo ao livro. Solução na página 530.

Problema resolvido 10.2
Racionaliza o denominador de cada uma das seguintes frações:

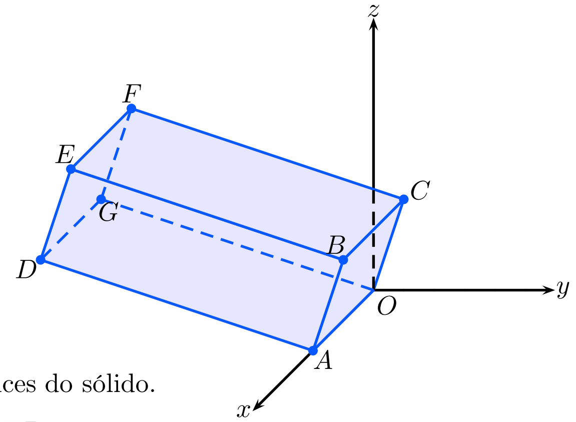
10.2.1 $\dfrac{5}{\sqrt{7}}$; **10.2.2** $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ **10.2.3** $\dfrac{4}{2 + \sqrt{5}}$ **10.2.4** $\dfrac{5}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$

10.2.5 $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$; **10.2.6** $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{8}}$ **10.2.7** $\dfrac{2}{3\sqrt[5]{2}}$ **10.2.8** $\dfrac{1}{\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}}$

Resolução: Ver resolução no documento digital anexo ao livro. Solução na página 530.

Problema resolvido 11.4

Na figura seguinte está representado num referencial ortonormado $Oxyz$ um paralelepípedo retângulo.



Sabe-se que:

- o ponto A tem de coordenadas $(4, 0, 0)$;
- o ponto B tem de coordenadas $(4, 1, 3)$;
- o ponto F tem de coordenadas $(0, -8, 6)$.

11.4.1 Determina as coordenadas dos restantes vértices do sólido.

11.4.2 Determina as equações paramétricas da reta EB.

11.4.3 Determina a área do paralelepípedo.

11.4.4 Mostra que a equação geral do plano ABF é $15x - 6y + 2z - 60 = 0$.

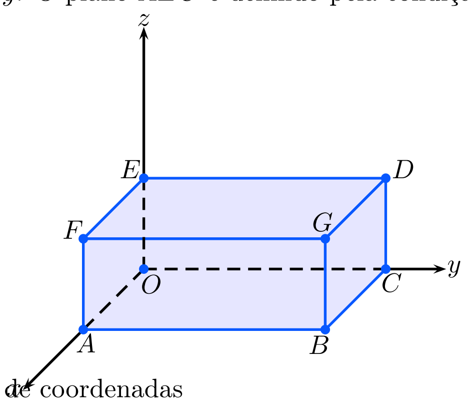
11.4.5 Determina as equações paramétricas da reta perpendicular ao plano ABF que contém o ponto C.

11.4.6 Determina com aproximação às décimas da milésima a amplitude do ângulo $F\widehat{B}C$.

Resolução: Ver resolução no documento digital anexo ao livro. Solução na página 530.

Problema resolvido 11.5

No referencial ortonormado $Oxyz$ da figura está representado um paralelepípedo rectângulo $[OABCDEFG]$ cuja base $[OABC]$ está contida no plano xOy. O plano AEC é definido pela condição $6x + 3y + 8z - 24 = 0$.



11.5.1 Determina as coordenadas do ponto E.

11.5.2 Sabendo que D tem coordenadas $(0, 8, 3)$ determina:

(a) as equações paramétricas da recta que contém a diagonal espacial $[AD]$;

(b) uma equação do plano definido pelas diagonais $[AD]$ e $[FC]$.

11.5.3 Calcula o valor de $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$ de modo que o ponto de coordenadas $\left(0, \frac{16}{3}, \sin(\alpha - 3\pi)\right)$ pertença ao plano AEC.

11.5.4 Determina a área da secção produzida no sólido pelo plano DAG.

11.5.5 Determina uma equação vetorial da reta OG.

11.5.6 Determina as coordenadas do ponto de interseção do plano AEC com a reta OG.

Resolução: Ver resolução no documento digital anexo ao livro. Solução na página 530.

15. Exames modelo de Matemática A

15.1 Exame modelo 1

GRUPO I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

---

1. Considere uma bandeira com cinco tiras verticais.
Com cinco cores distintas, de quantas formas distintas podemos coloris a bandeira de modo a que não fiquem duas tiras seguidas com a mesma cor?

(A) 24 **(B)** 320 **(C)** 400 **(D)** 625

2. Seja Ω, conjunto finito, o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.
Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subseteq \Omega$ e $B \subseteq \Omega$).
Sabe-se que:

- $P(A \cup \overline{B}) = 0,8$;
- $P\left(B\right) = 0,3$

Qual é o valor de $P\left(\overline{A}|B\right)$?

(A) 1 **(B)** $0,6$ **(C)** $0,7$ **(D)** $\dfrac{2}{3}$

3. Considere as constantes reais positivas a, b e c, com $a \neq 1$, tais que

$$\log_a 2^3 = b \quad \text{e} \quad a^{2b} = c.$$

Qual das seguintes expressões é igual a $\log_a\left(2c\right) - \log_2 c$?

(A) $4b - 6$ **(B)** $\dfrac{7}{3}b - 6$ **(C)** $\sqrt[3]{b} + 2b$ **(D)** $\sqrt[3]{b} + 2b - 6$

2.1. Escolhe-se uma caixa aleatoriamente e extraem-se duas bolas.
Sabendo que a probabilidade de sairem duas bolas azuis é igual a $\frac{4}{15}$, determine o número de bolas verdes existentes na caixa 2.

2.2. Considere agora que as bolas da caixa 1 estão numeradas de 1 a 6.
Retirando cinco bolas da caixa 1 e dispondo-as, ao acaso, numa fila, a probabilidade de ficarem pelo menos duas bolas verdes por ordem decrescente de numeração (juntas ou separadas) é igual a:

$$\frac{{}^3C_2 \times {}^5C_2 \times 3! + {}^5C_2 \times {}^3A_2 \times (3! - 1)}{{}^6A_5}.$$

Elabore uma composição na qual explique a expressão apresentada.
Na sua resposta:

- enuncie a regra de Laplace;
- explique o número de casos possíveis;
- explique o número de casos favoráveis.

3. Na Figura 3 está representado um modelo que ilustra a posição de um barco num lago e o solo submerso e não submerso envolvente.
O barco está equipado com um sensor no ponto P que permite medir a sua distância ao fundo do lago. Admita que os pontos P e Q estão $0.2\ m$ e $0.3\ m$ abaixo do nível da água, respetivamente.

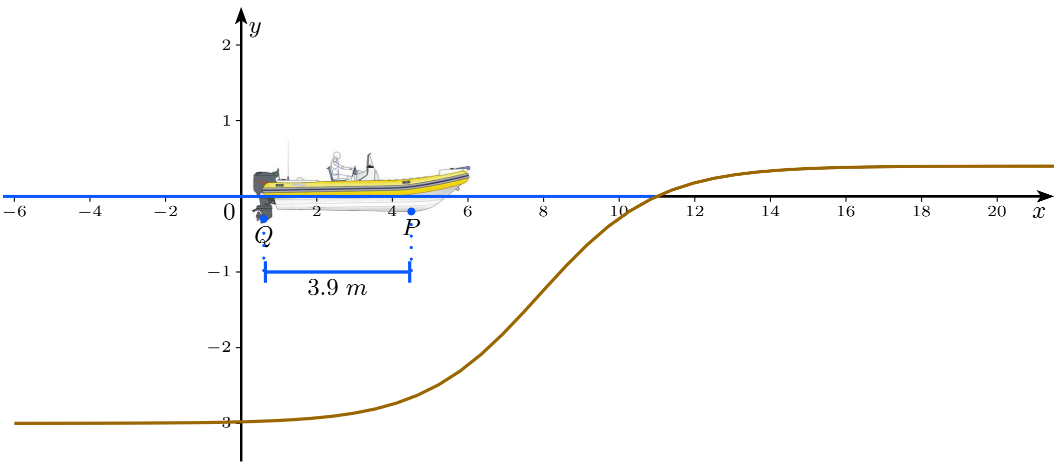


Figura 3

A altitude do solo, em metros, relativamente ao nível da água do lado é modelizada pela função definida por

$$f(x) = \frac{0.5e^{0.6x} - 507}{e^{0.6x} + 169}$$

onde x representa a distância à origem do referencial ortonormado utilizado no modelo.
Admita que o modelo é válido para $x \in [-1000, 1000]$.

3.1. Determine a distância do ponto Q ao fundo do lago quando a abcissa de P é 6. Apresente o resultado arredondado às décimas.

3.2. Determine os valores para os quais tende a altitude do solo quando as abcissas aumentam ou diminuem muito.
Interprete o seu significado no contexto do problema.

3.3. Para o barco ficar atracado em segurança na margem do lago a distância do ponto P ao solo deve ser de pelo menos $0.5\ m$. Determine os valores das abcissas de P, arredondadas às centésimas, para as quais tal situação se verifica recorrendo à calculadora gráfica.
Na sua resposta:

- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) que visualizar na calculadora, devidamente identificado(s);
- indique no(s) gráfico(s) o(s) ponto(s) relevantes para a resolução do problema arredondados às milésimas.

5. Na Figura 2, estão representados o círculo trigonométrico e um quadrilátero $[ABCD]$.

Sabe-se que:

- o ponto B pertence à reta de equação $x = 1$;
- $\alpha \in \left]\frac{7}{4}\pi, 2\pi\right[$ é a amplitude de um ângulo orientado cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semirreta $\dot{O}B$.
- o ponto A tem coordenadas $(1, -1)$;
- o ponto D tem coordenadas $(0, -1)$;
- o ponto C é simétrico de B relativamente a O;

Qual das expressões seguintes dá a área do quadrilátero $[ABCD]$, em função de α?

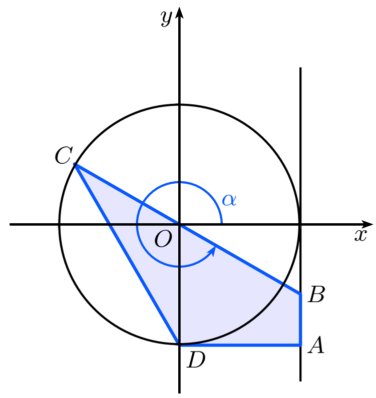


Figura 2

(A) $\dfrac{2 + \tan\alpha + \sin\alpha}{2}$ **(B)** $\dfrac{1 + \tan\alpha + \cos\alpha}{2}$

(C) $\dfrac{2 + \tan\alpha - \sin\alpha}{2}$ **(D)** $\dfrac{2 + \tan\alpha + \cos\alpha}{2}$

6. Considere o número complexo $z = 2i \operatorname{cis} \frac{\pi}{5}$.
Qual é o menor número inteiro positivo n para o qual z^n é um número real negativo?

(A) 10 **(B)** 7 **(C)** 20 **(D)** 0

7. Na Figura 2, está representado um hexágono regular inscrito numa circunferência de raio 5 cm e centro O.
Qual é o valor do produto escalar $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{FA}$?

(A) $-\dfrac{25}{2}$ **(B)** $\dfrac{25}{2}$

(C) -25 **(D)** 25

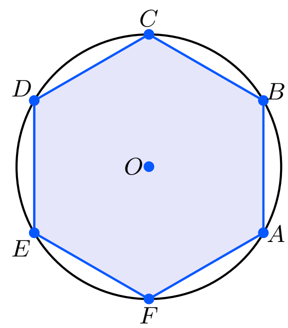


Figura 3

8. Considere as sucessões (a_n) e (b_n) tais que:

- (a_n) é uma progressão aritmética tal que $a_8 + a_{48} = k$ (k é um número real);
- $b_n = \ln\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-10n}\right]$.

Sabe-se que $\lim (b_n) = k$.
Qual é o valor da soma de todos os termos da sucessão desde o termo de ordem 18 (inclusive) ao termo de ordem 38 (inclusive)?

(A) -105 **(B)** 90 **(C)** -90 **(D)** 105

16.5 Exame nacional 5 – 1.ª fase 2017

Versão 1

GRUPO I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

1. Considere todos os números naturais de quatro algarismos que se podem formar com os algarismos de 1 a 9.
Destes números, quantos são múltiplos de 5?

(A) 729 **(B)** 1458 **(C)** 3645 **(D)** 6561

2. Uma turma é constituída por rapazes e por raparigas, num total de 20 alunos.
Sabe-se que:

- $\frac{1}{4}$ dos rapazes tem olhos verdes;
- escolhido, ao acaso, um aluno da turma, a probabilidade de ele ser rapaz e de ter olhos verdes é $\frac{1}{10}$.

Quantos rapazes tem a turma?

(A) 4 **(B)** 8 **(C)** 12 **(D)** 16

3. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função polinomial f.
Sabe-se que o único ponto de inflexão do gráfico de f tem abcissa 0.
Seja f'' a segunda derivada da função f.
Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $f''(1) + f''(2) < 0$
(B) $f''(-2) + f''(-1) > 0$
(C) $f''(-1) \times f''(-2) < 0$
(D) $f'(1) \times f''(2) > 0$

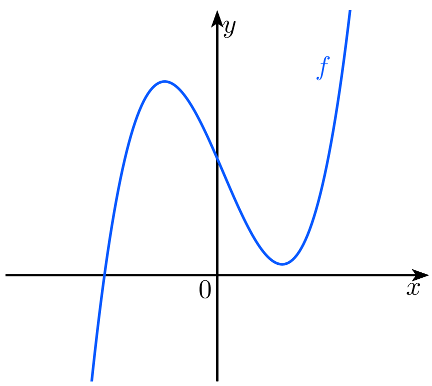


Figura 1

4. Sejam f e g duas funções de domínio $\mathbb{R}^+$.
Sabe-se que a reta de equação $y = -x$ é assíntota oblíqua do gráfico de f e do gráfico de g.
Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x) \times g(x)}{x}$?

(A) $+\infty$ **(B)** 1 **(C)** -1 **(D)** $-\infty$

5. Seja f a função, de domínio A e contradomínio $]-1, +\infty[$, definida por $f(x) = \tan x$.
Qual dos conjuntos seguintes pode ser o conjunto A?

(A) $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$ **(B)** $\left]\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[$

(C) $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right[$ **(D)** $\left]\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[$

Proposta de resolução

GRUPO I

1. Vamos recorrer ao esquema seguinte e ao Princípio fundamental da contagem para resolver o problema

$$\underset{9}{\_\_}\ \underset{9}{\_\_}\ \underset{9}{\_\_}\ \frac{5}{1}$$

Como cada algarismo pode ser $1, 2, \ldots, 9$ e o último tem que ser o 5 então existem $9 \times 9 \times 9 \times 1 = 729$ números.
A opção correta é a **(A)**.

2. Consideremos os acontecimentos H: "ser homem"e V: "ter os olhos verdes".
De acordo com os dados do enunciado, $P(V|H) = \frac{1}{4}$ e $P(H \cap V) = \frac{1}{10}$.
Assim temos
$P(V|H) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{P(V \cap H)}{P(H)} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{10}}{P(H)} = \frac{1}{4}$
$\Leftrightarrow P(H) = \frac{4}{10} \Leftrightarrow \frac{\#H}{20} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \#H = 8.$
Podemos concluir que a opção correta é a **(B)**.

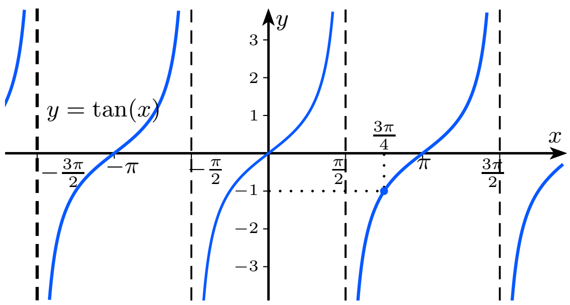
3. Como a concavidade do gráfico de f é voltada para cima em $[0, +\infty[$ então $f''(1) > 0$ e $f''(2) > 0$. Consequentemente, $f''(1) \times f''(2) > 0$.
A opção correta é a **(D)**.

4. Do facto de $y = -x$ ser assíntota oblíqua do gráfico de f podemos deduzir que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$ e que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$. Assim temos:

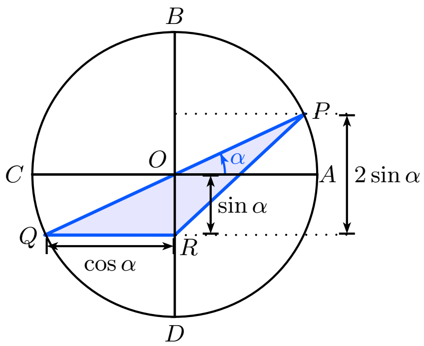
$$\begin{aligned}\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x) \times g(x)}{x} &= \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \times \lim_{x \to +\infty} g(x)\\ &= -1 \times (-\infty) = -\infty.\end{aligned}$$

A opção correta é a **(A)**.

5. Na figura em baixo está representado parte do gráfico da função tangente.



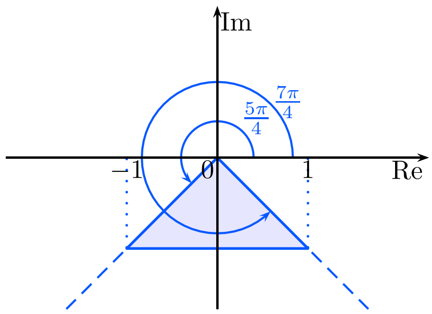
Podemos observar na figura que para $x \in \left]\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[$ temos $f(x) \in]-1, +\infty[$
A opção correta é a **(B)**.



6.

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow tg^2\alpha = \frac{1}{\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} - 1$$
$$\Leftrightarrow \tan^2\alpha = 4 \Leftrightarrow \tan\alpha = \pm 2.$$

Como o declive da reta r é igual a $\tan\alpha$ então, apenas a alternativa **(C)** pode ser válida.
7. A figura em baixo representa a região.



Como a área do triângulo é $\frac{2 \times 1}{2} = 1$, a opção correta é a **(D)**
8. Como para $n \le 20$ temos $1 \le u_n \le 20$ e para $n > 20$ temos $-1 \le u_n \le 1$ então $-1 \le u_n \le 20$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
A opção correta é a **(C)**.

GRUPO II

1.1 A distância entre as imagens geométricas de z_1 e z_2 ser $\sqrt{5}$ pode ser equacionada por $|z_1 - z_2| = \sqrt{5}$.
Para prosseguir, devemos escrever z_1 e z_2 na forma algébrica.

$$\begin{aligned}z_1 &= \frac{1-3i^{19}}{1+i} = \frac{1-3i^{19-16}}{1+i} = \frac{1-3i^3}{1+i}\\ &= \frac{1-3\times(-i)}{1+i} = \frac{1+3i}{1+i} = \frac{(1+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}\\ &= \frac{1-i+3i-3i^2}{1^2+1^2} = \frac{4+2i}{2} = 2+i.\end{aligned}$$

$z_2 = -3k \operatorname{cis}\frac{3\pi}{2} = -3k \times (-i) = 3ki,\ k \in \mathbb{R}^+.$
Deste modo,

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |2 + i - 3ki| = \sqrt{5}$$