PRÉ-CÁLCULO MULTIMÉDIA

Rui Castanheira de Paiva

Introdução

Este trabalho aborda alguns dos capítulos da matemática lecionada no Ensino Secundário que consideramos serem pré-requisitos da matemática lecionada no Ensino Superior: conjuntos, lógica matemática, referenciais cartesianos, funções reais de variável real, funções exponencial e logarítmica, sucessões, limites e continuidade e derivadas. Deste modo, os destinatários desta obra são nomeadamente os estudantes ou futuros estudantes de engenharia, economia, gestão, ensino médio do Brasil, entre outros, que pretendem aprender ou recordar os conceitos indispensáveis para a sua integração na matemática superior.

A ideia base do livro Pré-Cálculo multimédia é ensinar ou recuperar as bases de matemática necessárias para o ensino superior através de um livro de texto acompanhado com vídeos tutoriais. Deste modo, o livro está associado a:

- 67 aulas teóricas em vídeo;
- 248 exemplos de aplicação dos conceitos teóricos em vídeo;
- 587 exercícios de treino com resolução passo a passo em vídeo.

Ao longo do livro são indicados os endereços web:

- das aulas teóricas em vídeo que acompanham cada secção;
- dos exercícios com resolução em vídeo de acesso gratuito na Academia Aberta;
- dos exercícios com resolução em vídeo de acesso não gratuito, disponíveis através de credenciais fornecidas aos compradores do livro. As credenciais são válidas por 2 anos para um único utilizador (pode comprar em bit.ly/detalhesobrapp).

A acrescentar ao trabalho de elaboração desta obra, há também o trabalho que os seus conteúdos dão a estudar! Termino com uma frase que me serve de apoio e que recomendo a todos os estudantes:

"Considero feliz aquele que quando se fala de êxito procura a resposta no seu trabalho."
(Ralph Waldo Emerson)

O autor, Rui Paiva (Home page: bit.ly/cvruicpaiva)

Conteúdo

1. Conjuntos

O objetivo deste capítulo é apresentar os conceitos e terminologia mais habituais nos conjuntos, apresentar os principais conjuntos numéricos e as operações numéricas mais elementares neles definitas. O presente capítulo também está compilado em

bit.ly/Ficha_e_aulas_de_conjuntos_PC

no formato de aulas e exercícios em vídeo. Deve utilizar as credenciais fornecidas pelo autor para aceder aos vídeos. Acrescentamos na versão escrita algumas demonstrações e pretendemos que a possibilidade de escrita de anotações e orientação ao longo dos capítulos represente o principal complemento ao formato multimédia. Pretendemos que a conjugação dos dois formatos de apresentação da matéria conduza ao aprofundamento necessário para a sua utilização nos ensinos universitário e pré-universitário.

O capítulo está dividido em 6 secções. Na secção 1.1 introduzimos o tema dos conjuntos. Na secção 1.2 apresentamos a notação e terminologia próprias dos conjuntos. A secção 1.3 apresenta as principais relações entre conjuntos e respetiva terminologia. Na secção 1.4 apresentamos operações com conjuntos mais usuais e respetivas propriedades e na secção 1.5 o conceito de produto cartesiano. Apresentamos na secção 1.6 os principais conjuntos numéricos e as operações mais comuns neles definidas, a representação de conjuntos de números reais na forma de intervalo e a notação científica para números reais.

Exemplo 1.2 — Interseção de conjuntos
Dados $A = \{1, 3, 6, 7\}$ e $B = \{2, 3, 6, 9\}$ então $A \cap B = \{3, 6\}$. O diagrama de Venn da Figura 1.3 ilustra a situação.

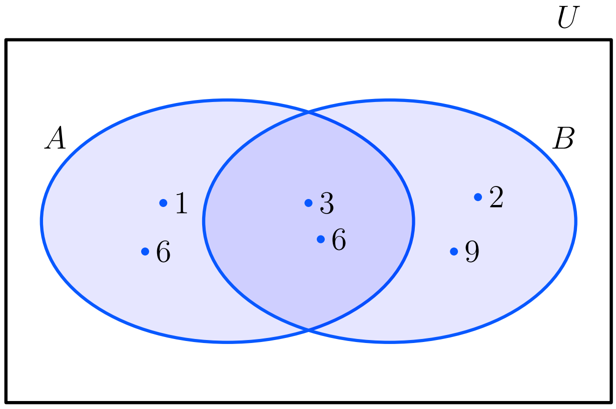


Figura 1.3: Representação em Diagrama de Venn de $A \cap B$ do Exemplo 1.2.

Dados dois conjuntos A e B, chamamos *reunião* de A com B, e escrevemos $A \cup B$, ao conjunto formado pelos elementos que pertencem a pelo menos um dos dois conjuntos. É habitual ilustrar este conceito através de um diagrama de Venn semelhante ao da figura 1.4.

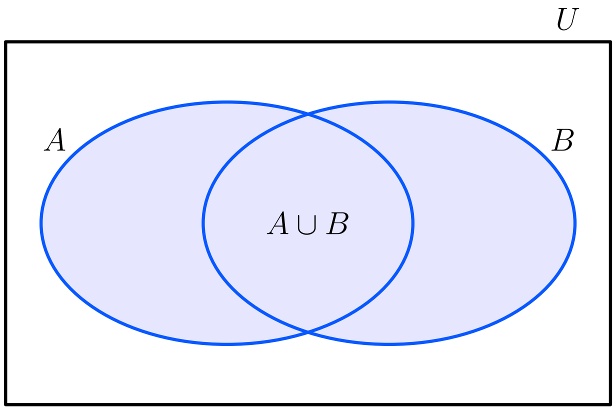


Figura 1.4: Representação em Diagrama de Venn de $A \cup B$.

Exemplo 1.3 — Reunião de conjuntos
Dados $A = \{1, 3, 6, 7\}$ e $B = \{2, 3, 6, 9\}$ então $A \cup B = \{1, 2, 3, 6, 7, 9\}$. O diagrama de Venn da Figura 1.5 ilustra a situação.

- $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ se $b \neq 0$.
- $a\sqrt[n]{c} + b\sqrt[n]{c} = (a+b)\sqrt[n]{c}$.
- $\left(\sqrt[n]{c}\right)^p = \sqrt[n]{c^p}$.
- $\sqrt[n]{\sqrt[p]{c}} = \sqrt[np]{c}$.

Exemplo 1.52 — Raízes índice n
Nos exemplos seguintes aplicam-se as propriedades das raízes índice n:

(a) $\sqrt[4]{2} \times \sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{10}$; $\sqrt[5]{3} \times \sqrt[5]{10} = \sqrt[5]{30}$; $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8 \times 3} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3}$;

(b) $\dfrac{\sqrt[7]{26}}{\sqrt[7]{13}} = \sqrt[7]{\dfrac{26}{13}} = \sqrt[7]{2}$;

(c) $2\sqrt{5} + 4\sqrt{5} = (2+4)\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$; $8\sqrt[5]{14} - 3\sqrt[5]{14} = 5\sqrt[5]{14}$;

(d) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[4\times 3]{5} = \sqrt[12]{5}$.

Tendo em consideração a ordem de precedência das operações numéricas, apresentamos o seguinte exemplo.

Exemplo 1.53 — Precedência das operações numéricas
Nos exemplos seguintes aplicam-se regras de precedência das operações numéricas:

(a) $\sqrt{(-3)^2} \times 2 = \sqrt{9} \times 2 = 6$; $\dfrac{2}{3} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1^2}{2^2} = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{2}{12} = \dfrac{1}{6}$;

(b) $\dfrac{2}{3^2} - 1 - 3\sqrt{5} \times 2 = \dfrac{2}{9} - 1 - 6\sqrt{5} = \dfrac{2}{9} - \dfrac{9}{9} - 6\sqrt{5} = -\dfrac{7}{9} - 6\sqrt{5}$;

(c) $-\dfrac{5}{4} \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 = -\dfrac{5}{4} \times \dfrac{1^2}{4^2} = -\dfrac{5}{4} \times \dfrac{1}{16} = -\dfrac{5}{64}$.

Exercício 1.6
Recomendamos a resolução dos exercícios 14 e 15 da Secção 1.10. Deve utilizar as credenciais fornecidas pelo autor para aceder à sua resolução em vídeo.

2. Lógica matemática

As definições e os teoremas da Matemática utilizam uma linguagem mais rigorosa do que a linguagem que utilizamos na vida corrente. Com o objetivo de responder a essa necessidade, apresentamos no presente capítulo alguns termos e conceitos de Lógica Matemática sempre acompanhados de exemplos intuitivos e exemplos do quotidiano.

O presente capítulo também está compilado no formato de aulas e exercícios em vídeo em bit.ly/Ficha_Aulas_Logica_AA10. Acrescentamos na versão escrita algumas demonstrações e pretendemos que a possibilidade de escrita de anotações e orientação ao longo dos capítulos represente o principal complemento ao formato multimédia.

O capítulo está dividido em 4 secções. Na secção 2.1 introduzimos o tema da lógica matemática. Na secção 2.2 apresentamos os conceitos de designação e proposição. A secção 2.3 apresenta o conceito de expressões com variáveis. Apresentamos na secção 2.4 um caso particular de proposições envolvendo o que definiremos por quantificadores.

2.1 Motivação

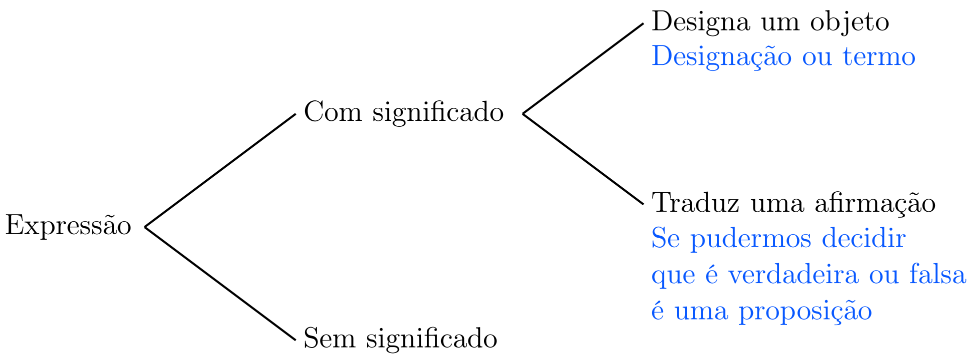
Figura 2.1: Aristóteles (384 a.C. a 322 a.C.)

A primeira elaboração detalhada de lógica surgiu com Aristóteles (filósofo grego, 384 a.C. a 322 a.C., aluno de Platão) através da estrutura lógica da argumentação. A sua ideia foi estudar o modo como os mestres da retórica e da oratória podiam enganar os cidadãos através de argumentos incorretos. O seu trabalho permitiu fundamentar cientificamente o facto de haver argumentos convincentes que estão incorretos do ponto de vista lógico.

A aplicabilidade dos conceitos de lógica não se limita à Filosofia e Matemática. Podemos encontrar na computação e em variados campos das engenharias diversos exemplos da sua utilização.

2.2 Designações e proposições

Na Matemática, chamamos expressão a qualquer sequência de símbolos.



Exemplo 2.1 — Designações e afirmações
Nos exemplos apresentam-se exemplos de designações e afirmações:

(a) Em linguagem corrente “Carlos” e “gato” são designações ou termos; “Coimbra é uma cidade” e o “Miguel é bonito” são afirmações.

(b) Em linguagem matemática “4” e “$3+1$” são designações; “$2+1=4$” e “$7-2>2$” são proposições.

Observe-se que $2+4$ e $5+1$ são ambas designações para o 6. Por este motivo, dizemos que $2+4$ e $5+1$ são designações *equivalentes* e escrevemos $2+4=5+1$. Na Lógica consideramos apenas afirmações sobre as quais se pode decidir se são verdadeiras ou falsas – a que chamamos *proposições*.

Uma proposição é necessariamente verdadeira ou falsa (mas nunca uma coisa e outra). É habitual dizer que a proposição tem valor lógico 1 e 0 quando tem valor lógico verdade ou falsidade respetivamente. Como exemplos, consideremos as proposições:

$$4=2+1,\ 3^2=5,\ 5-1>3 \text{ e } 3-1=9-7.$$

As duas primeiras proposições são falsas e as duas últimas verdadeiras.

Como dizemos que duas proposições são *equivalentes* quando têm o mesmo valor lógico então as duas primeiras proposições e as duas últimas são equivalentes e escreve-se utilizando o símbolo $\Leftrightarrow$.

Deste modo, se duas proposições p e q tiverem o mesmo valor lógico escrevemos $p \Leftrightarrow q$ (“p e q são equivalentes”).

$$1)\ \sim; \quad 2)\ \vee,\ \wedge,\ \dot{\vee}; \quad 3)\ \Rightarrow; \quad 4)\ \Leftrightarrow.$$

Deste modo, devemos obedecer a esta ordem para efetuar as operações lógicas. No caso de a proposição envolver parênteses devemos começar pela proposição que estes envolvem.

Exemplo 2.9 — Precedência de operadores lógicos
Consideremos as proposições
p: "$3 = 2 + 1$", q:"$4 > 2$" e r: "$2^2 = 5$". Então:

(a) $p \dot{\vee} q \wedge r$ é uma proposição falsa porque $p \dot{\vee} q$ e r são falsas.

(b) $p \dot{\vee} (q \wedge r)$ é uma proposição verdadeira porque p é verdadeira e $q \wedge r$ é falsa.

(c) $p \wedge (\sim q) \vee r$ é uma proposição falsa porque $p \wedge (\sim q)$ e r são falsas.

Exercício 2.1
Recomendamos a resolução dos exercícios 1 e 2 da Secção 2.5. Deve utilizar as credenciais fornecidas pelo autor para aceder à sua resolução em vídeo.

2.3 Expressões com variáveis

Além das designações e proposições que apresentámos na secção anterior, utilizamos na linguagem matemática expressões que utilizam *variáveis*, isto é símbolos (geralmente letras) que podem ser substituídos por designações mediante determinadas regras. Por exemplo, as expressões

$$2x + 3, \quad (x + 2)^2, \quad x + 2xy - y^2$$

não são propriamente designações. No entanto, transformam-se em designações sempre que se substituem as variáveis da expressão por designações. Se tomarmos, por exemplo $x = 5$ e $y = 3$ as expressões anteriores dão origem às designações

$$2 \times 5 + 3, \quad (5 + 2)^2, \quad 5 + 2 \times 5 \times 3 - 3^2.$$

De uma forma geral, denominamos por *expressão designatória* toda a expressão com variáveis que se converta numa designação depois de se substituirem as variáveis por valores particulares.

Devemos desde já salientar que, de uma forma geral, nem todos os valores das variáveis permitem esta transformação. Se considerarmos, por exemplo, as expressões designatórias

$$\frac{4}{x}, \quad \frac{2+y}{y-1}$$

a substituição de $x = 0$ na primeira e $y = 1$ na segunda dão origem às expressões

$$\frac{4}{0}, \quad \frac{3}{0}$$

2.5 Ficha de trabalho multimédia de lógica

Pode aceder no endereço bit.ly/Ficha_Aulas_Logica_AA10 à resolução detalhada em formato de vídeo da ficha de trabalho apresentada nesta secção bem como às aulas teóricas correspondentes.

2.5.1 Ficha de trabalho

1. Classifique as expressões seguintes nas categorias de designação, proposição ou afirmação sem valor lógico.

   (a) "$4+7$";

   (b) "o Manuel é alto";

   (c) "estamos na Primavera";

   (d) "$2+3^2>3$";

   (e) "o vermelho é a cor mais bonita que há";

   (f) "A capital de Angola é Luanda";

   (g) "José";

   (h) "$(3-1)^2=3^2-6\times 1+1$";

   (i) "$2+1$ e 3 são designações equivalentes a 3".

2. Considere as proposições:

   p: "Portugal é um país do continente europeu";

   q: "Lisboa é a capital de Portugal";

   r: "Lisboa é uma capital europeia";

   s: "Lisboa é uma capital americana".

   Traduza em linguagem corrente as seguintes proposições e indique o seu valor lógico.

   (i) $p\wedge q$; (ii) $p\vee q$; (iii) $p\wedge s$; (iv) $q\wedge(\sim r)$; (v) $\sim(p\wedge q)$.

3. Considere novamente as proposições definidas no exercício 1.

   (a) Traduza em linguagem corrente as seguintes proposições e indique o seu valor lógico.

   (i) $p\dot{\vee}q$; (ii) $p\Rightarrow r$; (iii) $(p\wedge q)\Rightarrow s$;

   (iv) $r\dot{\vee}s$; (v) $p\Rightarrow(r\vee s)$;

   (b) Traduza em linguagem corrente as proposições contra-recíproca, recíproca e contrária da proposição $p\Rightarrow q$.

4. Escreva cada uma das seguintes proposições sem utilizar o operador $\sim$.

   (a) $\sim(6-1<2)$; (b) $\sim\left(5^2=24\right)$; (c) $\sim(3>2\vee 3\geq 1)$;

   (d) $\sim(8=7\vee 2<3)$; (e) $\sim((3+2>4)\Rightarrow 2\geq 1)$.

3. Referenciais cartesianos

Neste capítulo apresentamos uma introdução à geometria analítica, também denominada por geometria de coordenadas ou por geometria cartesiana. Trata-se de uma abordagem da geometria que recorre a um sistema de coordenadas para definir objetos matemáticos. O presente capítulo também está compilado no formato de aulas e exercícios em vídeo em

bit.ly/Ficha_e_aulas_de_referenciais_cartesianos_PC.

Acrescentamos na versão escrita algumas demonstrações e pretendemos que a possibilidade de escrita de anotações e orientação ao longo dos capítulos represente o principal complemento ao formato multimédia.

O capítulo está dividido em 6 secções. Na secção 3.1 introduzimos o tema referenciais cartesianos. Na secção 3.2 apresentamos as retas paralelas aos eixos e semiplanos. A secção 3.3 apresenta os conceitos de bissetrizes dos quadrantes. Apresentamos na secção 3.4 a equação reduzida da reta. Na secção 3.5 apresentamos a fórmula da distância entre dois pontos do plano. Na secção 3.6 apresentamos a equação da circunferência.

3.1 Introdução

A origem dos referenciais cartesianos está associada a uma situação do quotidiano muito simples de Descartes, notável matemático e filósofo francês do séc. XVII.

Um dia, ao observar os movimentos de uma mosca no teto, Descartes pensou que para os registar seria vantajoso utilizar uma folha quadriculada com medidas verticais e horizontais. Esta ideia deu origem à utilização de um referencial definido por dois eixos com

Figura 3.1: Decartes (1596-1650)

por *eixo das abcissas* e o outro por *eixo das ordenadas*. Cada ponto do plano pode ser identificado de forma única por um par ordenado (a, b) onde a é a abcissa e b a ordenada.

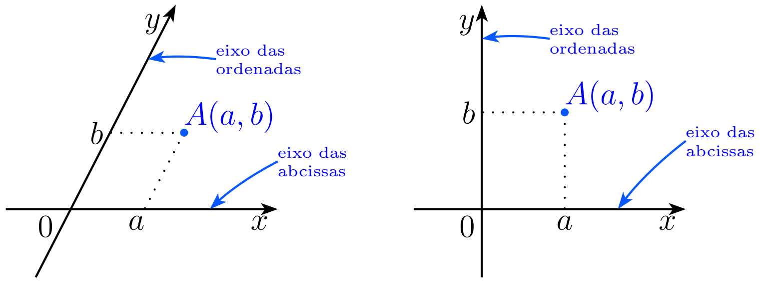


Figura 3.4: Referencial não ortogonal (esquerda) e ortogonal (direita)

O referencial da direita da Figura 3.4 diz-se *ortogonal* porque os eixos são perpendiculares. Se a escala for igual em ambos os eixos o referencial diz-se *monométrico* ou *normado*; caso contrário diz-se *dimétrico*.

Quando um referencial é ortogonal e normado é denominado por *ortonormado* e escrevemos abreviadamente referencial o.n. xOy.

A Figura 3.5 apresenta um exemplo que inclui todas as situações relativas às caraterísticas de ortogonalidade e escala nos eixos.

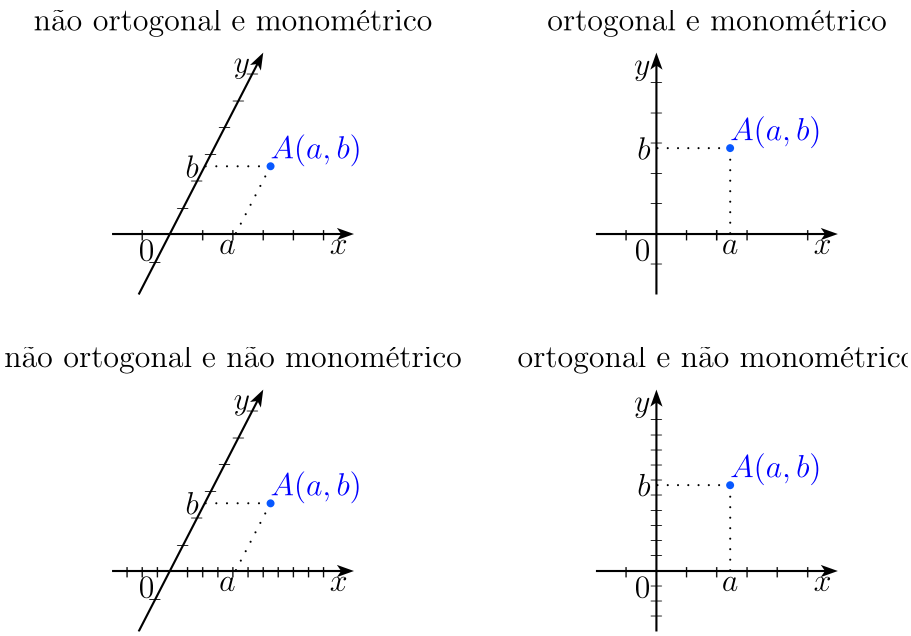


Figura 3.5: Caraterísticas de ortogonalidade e escala nos eixos dos referenciais

O conjunto de todos os pares ordenados de números reais designa-se por $\mathbb{R}^2$ e temos que $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Deste modo $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$. Cada par ordenado (a, b) corresponde a um único ponto que denotamos com uma letra maiúscula $(A, B, C, \ldots)$ e escrevemos $A(a, b)$, por exemplo.

5. Funções reais de variável real

O objetivo deste capítulo é apresentar os conceitos e terminologia mais habituais nas funções reais de variável real e apresentar algumas das principais funções. O presente capítulo também está compilado no formato de aulas e exercícios em vídeo no endereço bit.ly/Ficha_aulas_FuncoesPC.

Acrescentamos na versão escrita algumas demonstrações e pretendemos que a possibilidade de escrita de anotações e orientação ao longo dos capítulos represente o principal complemento ao formato multimédia.

O capítulo está dividido em 12 secções. Na secção 5.1 introduzimos o tema das funções. Na secção 5.2 apresentamos as definições elementares e principais propriedades das funções. Nas secções 5.3 a 5.9 apresentamos as funções afim, quadrática, definidas por ramos, módulo, par e ímpar, polinomial de grau maior que 2 e racional. Nas secções 5.10, 5.11 e 5.12 apresentamos as operações com funções, a função composta e a função inversa.

5.1 Introdução

Todos os dias lidamos com variáveis numéricas. Alguns exemplos são:

- tempo gasto num trajecto, que se pode medir com o relógio;
- a distância percorrida, que se mede no conta-quilómetros;
- peso da fruta, que se mede com a balança;
- a quantia a pagar no táxi, que se mede no taxímetro;

- consumo mensal de água, registado em contadores próprios...

...e encontramos muitos outros nas fábricas, nas lojas e mercados, nos campos, nos laboratórios, nos consultórios médicos... Na navegação aérea e marítima, variáveis como a latitude, a longitude, a velocidade do vento, a altitude são medidas a todo o instante pelos eficientes e sofisticados aparelhos de bordo.

Ora acontece muitas vezes que duas variáveis estão relacionadas de tal modo que pelos valores duma delas se sabem os correspondentes valores da outra. Diz-se então que uma das variáveis é função da outra. Por exemplo:

- o custo da fruta depende do peso, ou seja: o custo é função do peso;
- se precisamos de adubar uma horta, o peso de adubo a comprar depende da área a adubar, ou seja: o peso de adubo é função da área;
- o custo da viagem de táxi depende da distância percorrida: o custo é função da distância;
- quando se sobe uma montanha, a pressão atmosférica e a temperatura vão baixando à medida que a altitude aumenta: a pressão atmosférica é função da altitude; a temperatura do ar é função da altitude.

A representação num referencial ortogonal de duas variáveis que se relacionem pode facilitar a compreensão da sua relação. Vamos ver um exemplo.

Exemplo 5.1 — O passeio do Carlos
O gráfico da Figura 5.1 representa o percurso do Carlos, que se deslocou de bicicleta desde a sua casa até à casa do João, a 3 km de distância, regressando depois a casa.

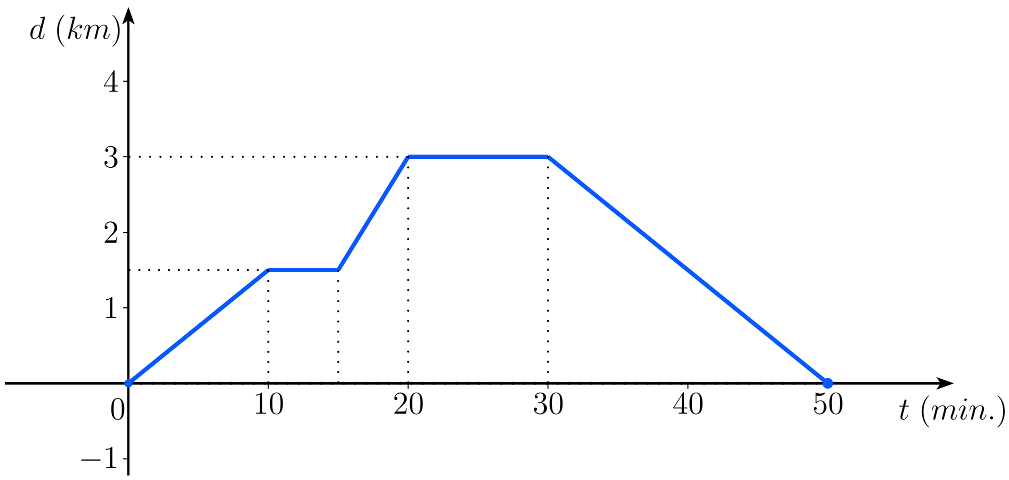


Figura 5.1: O passeio do Carlos.

(a) Quantas horas durou o passeio do Carlos?
Resposta: 50 minutos.

(b) Ao fim de quanto tempo se deu a primeira paragem? A que distância de casa? Quanto tempo durou?

  – x é a *variável independente*.

- à expressão definida por $f(x)$ dá-se o nome de *expressão analítica da função* f;
- ao conjunto A, conjunto dos objetos, chama-se *domínio* da função e representa-se por D_f.
- ao conjunto B chama-se *conjunto de chegada* da função.
- ao conjunto das imagens chama-se *contradomínio* da função e representa-se por D'_f.
- O contradomínio pode ou não coincidir com o conjunto de chegada.

Exemplo 5.2 — Representação de correspondências em diagramas sagitais
Os diagramas sagitais da Figura 5.2 representam correspondências.

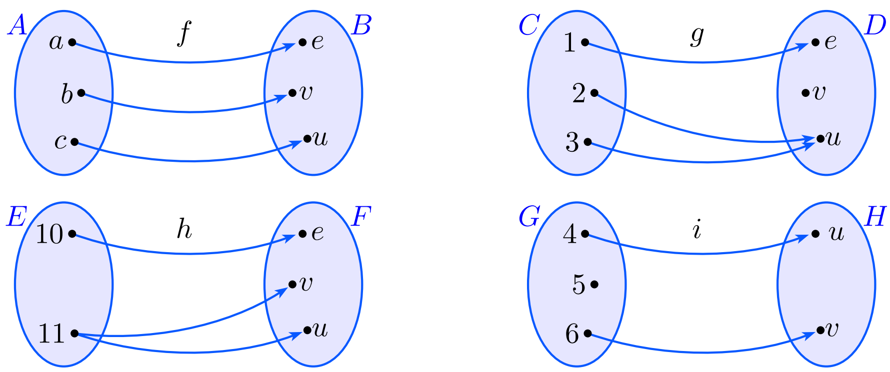


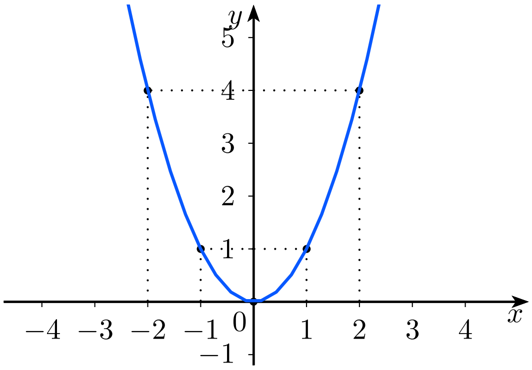
Figura 5.2: Correspondências representadas por diagramas sagitais.

As correspondências f e g definem funções uma vez que a cada elemento do conjunto de partida corresponde um único elemento do conjunto de chegada.
Em f temos $D_f = \{a, b, c\}$, o conjunto de chegada é $\{e, v, u\}$ e $D'_f = \{e, u, v\}$.
Em g temos $D_g = \{1, 2, 3\}$, o conjunto de chegada é $\{e, v, u\}$ e $D'_g = \{e, u\}$.
A correspondência h não representa uma função porque ao elemento 11 correspondem dois elementos.
A correspondência i não representa uma função porque ao 5 não corresponde nenhum elemento.

5.2.2 Propriedades das funções – Abordagem gráfica

Definição 5.2 — Função injetiva
Uma função f é *injetiva* quando a objetos diferentes correspondem imagens diferentes, ou seja, para dois quaisquer valores de D_f, x_1 e x_2:

$$\text{se } x_1 \neq x_2 \text{ então } f(x_1) \neq f(x_2).$$



x	$f(x) = x^2$
0	$0^2 = 0$
1	$1^2 = 1$
2	$2^2 = 4$
-1	$(-1)^2 = 1$
-2	$(-2)^2 = 4$

Figura 5.4: Construção do gráfico da função definida por $f(x) = x^2$.

Podemos construir com as imagens de f calculadas na alínea anterior uma tabela.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x) = x^2$	4	1	0	1	4

De uma forma geral, uma função pode ser definida através de:

- um diagrama;
- uma tabela de valores;
- uma expressão algébrica;
- um gráfico.

Propriedade 5.1 — Identificação de funções e da injetividade graficamente

- Graficamente, uma correspondência entre duas variáveis é uma função se ao traçarmos qualquer recta vertical esta intersectar o gráfico, no máximo num ponto.
- Graficamente, uma função é injetiva se toda a recta horizontal intersectar o gráfico da função em apenas um ponto.

Exemplo 5.5 — Identificação de funções e da injetividade graficamente
Na Figura 5.5 estão representados os gráficos das correspondências f e g

Definição 5.6 — Extremos de uma função
Seja f uma função e $x_0 \in D_f$.

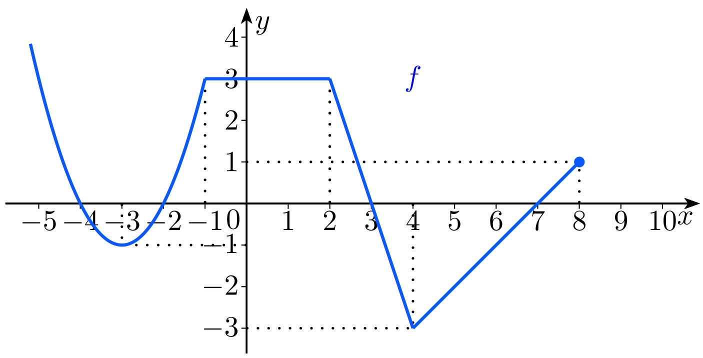
- $f(x_0)$ é um *máximo local* ou *relativo* de f se existir um intervalo aberto I que contém x_0 tal que $f(x_0) \geq f(x)$ para todo o $x \in I \cap D_f$. Neste caso, x_0 é denominado por *ponto de máximo local*.
- $f(x_0)$ é um *mínimo local* ou *relativo* de f se existir um intervalo aberto I que contém x_0 tal que $f(x_0) \leq f(x)$ para todo o $x \in I \cap D_f$. Neste caso, x_0 é denominado por *ponto de mínimo local*.
- $f(x_0)$ é o *máximo absoluto* de f se $f(x_0) \geq f(x)$ para todo o $x \in D_f$.
- $f(x_0)$ é o *mínimo absoluto* de f se $f(x_0) \leq f(x)$ para todo o $x \in D_f$.

  Em qualquer um dos casos anteriores, chamamos a x_0 *ponto de extremo local*.

Exemplo 5.10 — Extremos de uma função
Consideremos novamente o gráfico da função f representado na Figura 5.9 e estudemos agora a função relativamente à existência de extremos.

$$\text{Podemos concluir que: Extremos} \begin{cases} \text{máximos} \begin{cases} \text{relativos: } 1 \text{ e } 4 \\ \text{absoluto: } 4 \end{cases} \\ \\ \text{mínimos} \begin{cases} \text{relativos: } 0 \\ \text{absoluto: não tem} \end{cases} \end{cases}$$

Exemplo 5.11 — Generalidades de funções
Na figura seguinte está representado parte do gráfico de f.



Podemos concluir que:

- $D_f =]-\infty, 8]$, $D'_f = [-3, +\infty[$.

5.4.2 Nota histórica

Figura 5.19: Espelhos solares

Arquimedes (287 a.C - 212 a.C.) foi um matemático, físico, engenheiro e astrónomo grego que viveu em Siracusa, na região da Sicília. O trabalho que realizou nestas áreas fizeram com que seja considerado um dos principais cientistas da Antiguidade Clássica. Plutarco (50-125 d.C.), historiador grego, escreveu que durante o cerco a Siracusa realizada pelos romanos, Arquimedes ateou fogo a navios inimigos através da concentração da luz solar nas suas velas. Diz-se que foi utilizada uma grande quantidade de escudos de bronze e cobre bem polidos que atuaram como espelhos refletores da luz solar. Na figura em cima, obtida em *www.dailykos.com*, podemos observar o modo como a propriedade refletora da parábola foi utilizada para concentrar os raios solares no mesmo ponto.

Definição 5.10 — Função quadrática
Chama-se *função quadrática* à função

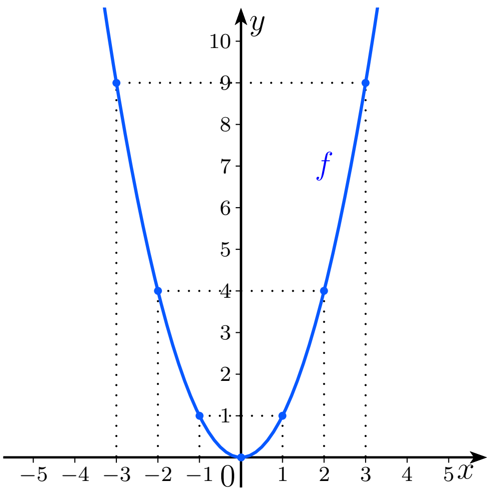
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

O gráfico de uma função quadrática é uma parábola.

Prosseguimos com um exemplo de representação do gráfico de uma função quadrática num referencial ortonormado.

Na Figura 5.20 é apresentado num referencial ortonormado o gráfico da função quadrática definida por $f(x) = x^2$.



x	$y = x^2$
0	0
1	1
−1	1
2	4
−2	4
3	9
−3	9

Figura 5.20: Parábola de equação $y = x^2$.

$$\begin{array}{r|l} D & d \\ \cline{2-2} -dq & q \\ \cline{1-1} r & \end{array}$$

onde D é o dividendo, d o divisor, q o quociente e r o resto. Sabemos que $D = d \times q + r$.

Sejam $A(x)$ e $B(x)$ dois polinómios de graus m e n respetivamente. Se $m \geq n$ é possível determinar polinómios $Q(x)$ e $R(x)$ que verificam a condição $A(x) = B(x) \times Q(x) + R(x)$. O grau de $Q(x)$ é $m - n$ e o de $R(x)$ é igual a $r < n$.

Exemplo 5.31 — Divisão inteira de polinómios
Sejam $A(x) = x^3 + 3x^2 - 2$ e $B(x) = x^2 + 2$. Determinemos os polinómios $Q(x)$ e $R(x)$ que verificam a condição $A(x) = B(x) \times Q(x) + R(x)$.

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 3x^2 + 0x - 2 & x^2 + 2 \\ \cline{2-2} -x^3 \qquad\quad -2x \quad & x+3 \\ \cline{1-1} 3x^2 - 2x - 2 & \\ -3x^2 \qquad -6 & \\ \cline{1-1} -2x - 8 & \end{array} \qquad \frac{x^3}{x^2} = x \qquad \frac{3x^2}{x^2} = 3$$

Deste modo temos $x^3 + 3x^2 - 2 = (x^2 + 2) \times (x + 3) - 2x - 8$. Temos portanto que o quociente da divisão é $Q(x) = x + 3$ e o resto é $R(x) = -2x - 8$.

Exemplo 5.32 — Divisão inteira de polinómios
Sejam $A(x) = x^3 - 1$ e $B(x) = x^2 + 1$. Determinemos os polinómios $Q(x)$ e $R(x)$ que verificam a condição $A(x) = B(x) \times Q(x) + R(x)$.

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 0x^2 + 0x - 1 & x^2 + 1 \\ \cline{2-2} -x^3 \qquad\quad -x \quad & x \\ \cline{1-1} -x - 1 & \end{array} \qquad \frac{x^3}{x^2} = x$$

Deste modo temos $x^3 - 1 = (x^2 + 1) \times x - x - 1$. Temos portanto que o quociente da divisão é $Q(x) = x$ e o resto é $R(x) = -x - 1$.

Exemplo 5.33 — Divisão inteira de polinómios
Sejam $A(x) = 9x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x$ e $B(x) = 3x - 1$. Determinemos os polinómios $Q(x)$ e $R(x)$ que verificam a condição $A(x) = B(x) \times Q(x) + R(x)$.

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & -3 & 2 & -1 \\
3 & & 3 & 0 & 6 \\
\hline
 & 1 & 0 & 2 & \boxed{5} = R
\end{array}$$

Podemos concluir que $Q(x) = x^2 + 2$ e o resto é $R(x) = 5$.

Exemplo 5.36 — Regra de Ruffini
Sejam $A(x) = -2x^3 + x - 1$ e $B(x) = x + 4$. Determine o quociente e o resto da divisão de $A(x)$ por $B(x)$ recorrendo à Regra de Ruffini.

Resolução: Comecemos por determinar o zero do divisor: $x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4$.

$$\begin{array}{c|cccc}
 & -2 & 0 & 1 & -1 \\
-4 & & 8 & -32 & 124 \\
\hline
 & -2 & 8 & -31 & \boxed{123} = R
\end{array}$$

Podemos concluir que $Q(x) = -2x^2 + 8x - 31$ e o resto é $R(x) = 123$.

O exemplo seguinte apresenta a Regra de Ruffini quando o divisor é da forma $ax - b$, com $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $b \in \mathbb{R}$.

Exemplo 5.37 — Regra de Ruffini
Sejam $A(x) = -x^3 + x^2 + 2$ e $B(x) = 2x - 4$. Determine o quociente e o resto da divisão de $A(x)$ por $B(x)$ recorrendo à Regra de Ruffini.

Resolução: Comecemos por determinar o zero do divisor: $2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

$$\begin{array}{c|cccc}
 & -1 & 1 & 0 & 2 \\
2 & & -2 & -2 & -4 \\
\hline
 & -1 & -1 & -2 & \boxed{-2} = R
\end{array}$$

A conclusão relativa ao quociente e ao resto deve ser adaptada. Sabemos que

$$A(x) = B(x) \times Q(x) + R(x).$$

7. Funções exponencial e logarítmica

7.1 Função exponencial

A função exponencial é utilizada para modelar uma relação na qual uma variação constante na variável independente implica a mesma variação proporcional na variável dependente. A função exponencial é amplamente utilizada na física, química, engenharia, biologia, economia e matemática e aparece frequentemente associada à função logarítmica, a sua função inversa.

Figura 7.1: Leonard Euler (1707-1783)

A história da matemática moderna reconhece o matemático suíço Leonard Euler (ver Figura 7.1) como uma referência na função exponencial e nas funções em geral. As suas contribuições no campo da terminologia e notação, em especial para a análise matemática, como a noção de uma função matemática justificam este reconhecimento. Além disso tornou-se célebre por seus trabalhos em mecânica, óptica, e astronomia. Euler é considerado um dos mais proeminentes matemáticos do século XVIII. O Número de Euler, aproximadamente 2.71828, tem esta denominação em homenagem a Euler. Trata-se de um número com aplicações em muitas áreas e, conjuntamente com o π e o número de ouro, recebe frequentemente a denominação de número místico. O número de Euler também é conhecido por número de Napier ou de Neper, um matemático escocês do século XVI, mas a escolha do símbolo e (de Euler) para denotar o número foi mantida em homenagem a Euler. Entre as funções exponenciais mais importantes está a que tem como base o número e. Entre os exemplos de aplicação clássicos estão a taxa de desintegração radioativa, que pode ser utilizada para determinar a idade dos fósseis, e o cálculo financeiro.

7.1.1 Definição e gráfico da função exponencial

VÍDEO — Aula 1
Pode aceder no endereço bit.ly/ELaula1 ao vídeo de exposição da presente secção, o vídeo da Aula 1. Recomendamos que acompanhe a aula com o livro e que o personalize com as suas anotações.

Definição 7.1 — Definição de função exponencial
Chama-se *função exponencial* à função

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = a^x \end{aligned}$$

onde $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.

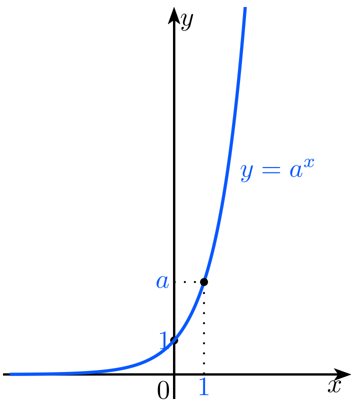


Figura 7.2: Função exponencial definida por $f(x) = a^x$ quando $a > 1$.

Exemplo 7.1 — Funções exponenciais
As funções exponenciais de bases 2, 3 e 1.2 são $y = 2^x$, $y = 3^x$ e $y = 1.2^x$ respetivamente.

Na Figura 7.2 está representado o gráfico de uma função exponencial definida por $f(x) = a^x$ quando $a > 1$.

Podemos observar as seguintes propriedades:

Propriedade 7.1 — Funções exponenciais de base superior a 1
Uma função exponencial de base $a > 1$ definida por $f(x) = a^x$ tem as seguintes propriedades:

- $D_f = \mathbb{R}$
- $D'_f =]0, +\infty[$.
- Consequentemente, f é positiva em $\mathbb{R}$.
- $f(0) = 1$.
- f é injetiva.
- $y = 0$ é A.H. quando $x \to -\infty$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$.
- f é crescente em $\mathbb{R}$.

Exemplo 7.2 — Funções exponenciais de base superior a 1
Na Figura 7.3 estão representados os gráficos de diversas funções exponenciais de base $a > 1$.

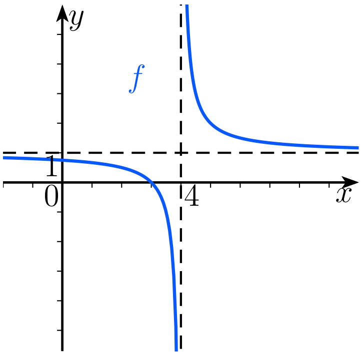


Figura 8.30: Gráfico de $y = \dfrac{x-3}{x-4}$

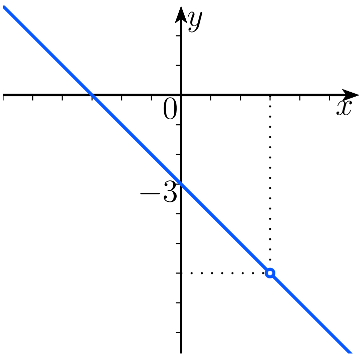


Figura 8.31: Gráfico de $y = \dfrac{x^2-9}{3-x}$

Podemos concluir que $x = 4$ é assíntota vertical do gráfico de f. É a única pois f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{4\}$.

Assíntotas horizontais

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-3}{x-4} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1 = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-3}{x-4}.$$

Podemos concluir que $y = 1$ é a única assíntota horizontal do gráfico de f.

A Figura 8.30 ilustra as conclusões obtidas.

(b) **Assíntotas verticais**

Como g é uma função racional então é contínua no seu domínio $D_g = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. Por esse motivo, o estudo das assíntotas verticais só faz sentido em $x = 3$.

$$\lim_{x\to3^+} \frac{x^2-9}{3-x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to3^+} \frac{(x-3)(x+3)}{-(x-3)} = \lim_{x\to3^+} \frac{x+3}{-1} = -6$$
$$= \lim_{x\to3^-} \frac{x^2-9}{3-x}.$$

Podemos concluir que o gráfico de g não admite assíntota vertical em $x = 3$. Como g é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ podemos concluir que o gráfico de g não admite assíntotas verticais.

Assíntotas horizontais

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-9}{3-x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{-x} = -\infty.$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-9}{3-x} = +\infty.$$

Podemos concluir que não existem assíntotas horizontais.

Assíntotas oblíquas

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-9}{3x-x^2} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{-x^2} = -1.$$

$$\lim_{x\to+\infty} (g(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2-9}{3-x} - (-x)\right) \overset{(\infty-\infty)}{=}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-9+3x-x^2}{3-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-9+3x}{3-x} = -3.$$

Neste caso, o estudo quando $x \to -\infty$ conduz aos mesmos resultados. Podemos concluir que $y = -x - 3$ é a única assíntota oblíqua.

A Figura 8.31 permite interpretar os resultados obtidos: o gráfico de g é uma reta com um buraco no ponto $(3, -6)$ e uma reta pode ser vista como uma assíntota oblíqua.

(c) **Assíntotas verticais**

Como h é a soma e a composição de funções contínuas no seu domínio $D_h = \mathbb{R}$ então h é contínua em $\mathbb{R}$ e não admite assíntotas verticais.

de f no ponto $P\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ é dada por

$$y - f\left(x_0\right) = f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right). \tag{9.3}$$

A Figura 9.7 ilustra a situação.

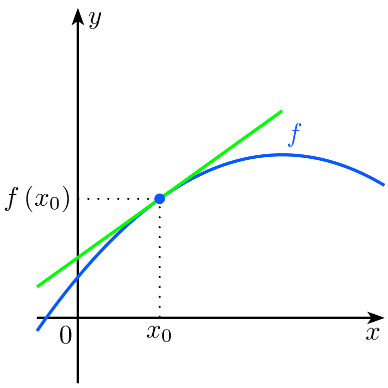


Figura 9.7: Reta tangente ao gráfico de f.

Exemplo 9.5 — Reta tangente
Determine uma equação da reta tangente ao gráfico da função definida por $f(x) = 4x - x^2$ no ponto de abcissa 1 e represente-a graficamente.

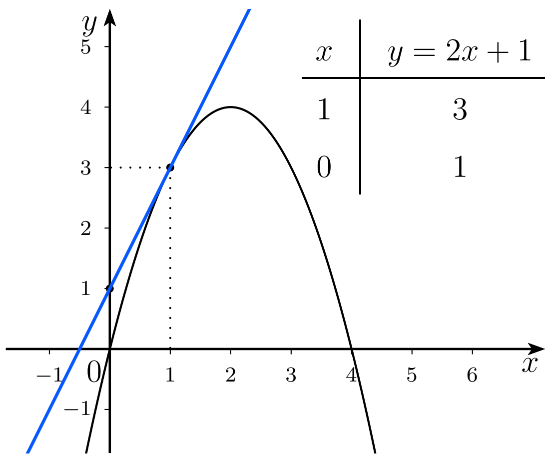
Resolução: Comecemos por determinar $f'(1)$ através da Definição 9.2.

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{4(1+h)-(1+h)^2-3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{4+4h-1-2h-h^2-3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2h-h^2}{h} \\ &\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} 2 \end{aligned}$$

Como o ponto de tangência é $T(1, f(1)) = (1, 3)$, podemos concluir pela equação (9.3) que uma equação da reta tangente é

$$y - 3 = 2 \times (x - 1) \Leftrightarrow y = 2x + 1.$$

Vamos agora representar a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.



x	$y = 2x + 1$
1	3
0	1

NOTA
Para representar graficamente uma reta basta conhecer dois pontos. Se a reta estiver definida pela sua equação reduzida

$$y = mx + b$$

basta obtermos as ordenadas das correspondentes a dois valores distintos de x.