

MATEMÁTICA 12

MULTIMÉDIA

Rui Castanheira de Oliveira



Academia Aberta

Introdução

A ideia base desta obra é abordar o 12.º ano de matemática através de um livro de texto acompanhado com vídeos tutoriais.

Deste modo, o livro está associado a:

- 58 aulas teóricas em vídeo;
- 171 exemplos de aplicação dos conceitos teóricos em vídeo;
- 456 exercícios de treino com resolução passo a passo em vídeo.

Ao longo do livro são indicados os endereços web:

- das aulas teóricas em vídeo que acompanham cada secção;
- dos exercícios com resolução em vídeo de acesso gratuito da Academia Aberta (www.academiaaberta.pt e www.facebook.com/aaberta);
- dos exercícios com resolução em vídeo com um grau de dificuldade mais elevado, disponíveis através de credenciais fornecidas aos compradores do livro. As credenciais são válidas por 2 anos para um único utilizador (pode comprar em bit.ly/detalhesdaobra).

A acrescentar ao trabalho de elaboração desta obra, há também o trabalho que os seus conteúdos dão a estudar! Termina com uma frase que me serve de apoio e que recomendo a todos os estudantes:

“Considero feliz aquele que quando se fala de êxito procura a resposta no seu trabalho.” (Ralph Waldo Emerson)

Desejo o maior sucesso a todos!

O autor, Rui Paiva
Home page: bit.ly/cvruicpaiva



Conteúdo

| | | |
|----------|---|-----------|
| I | Combinatória e probabilidades | |
| 1 | Análise combinatória | 13 |
| 1.1 | Introdução | 13 |
| 1.2 | Princípio fundamental da contagem | 14 |
| 1.3 | Permutações | 16 |
| 1.4 | Arranjos sem repetição | 18 |
| 1.5 | Arranjos com repetição | 20 |
| 1.6 | Combinações | 23 |
| 1.7 | Triângulo de Pascal | 26 |
| 1.8 | Binómio de Newton | 28 |
| 1.9 | Ficha de trabalho multimédia de análise combinatória | 32 |
| 2 | Probabilidades | 39 |
| 2.1 | Introdução | 39 |
| 2.2 | Revisão de conjuntos | 40 |
| 2.3 | Experiência aleatória e acontecimentos | 44 |
| 2.4 | Definição de probabilidade | 47 |
| 2.4.1 | Definição frequencista de probabilidade | 48 |
| 2.4.2 | Definição axiomática de probabilidade | 49 |
| 2.4.3 | Definição clássica ou de Laplace de probabilidade | 50 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 2.5 | Probabilidade condicionada | 52 |
| 2.6 | Acontecimentos independentes | 55 |
| 2.7 | Ficha de trabalho multimédia de probabilidades | 59 |
| 3 | Distribuição de probabilidades | 65 |
| 3.1 | Função de probabilidade | 65 |
| 3.2 | Função de probabilidade de uma variável aleatória real discreta | 67 |
| 3.3 | Distribuição Binomial | 70 |
| 3.4 | Distribuição Normal | 72 |
| 3.5 | Ficha de trabalho multimédia de distribuição de probabilidades | 77 |

II

Funções

| | | |
|----------|--|------------|
| 4 | Funções exponencial e logarítmica | 83 |
| 4.1 | Função exponencial | 83 |
| 4.1.1 | Definição e gráfico da função exponencial | 84 |
| 4.1.2 | Família de funções $y = b + a^{x+c}$ | 86 |
| 4.1.3 | Condições com exponenciais | 87 |
| 4.2 | Função logarítmica | 90 |
| 4.2.1 | Propriedades dos logaritmos | 91 |
| 4.2.2 | Definição e gráfico da função logarítmica | 92 |
| 4.2.3 | Condições com logaritmos | 94 |
| 4.3 | Ficha de trabalho multimédia de funções exponencial e logarítmica | 100 |
| 5 | Limites e continuidade | 107 |
| 5.1 | Nota histórica | 107 |
| 5.2 | Definição de limite | 108 |
| 5.3 | Propriedades dos limites | 112 |
| 5.3.1 | Propriedades operatórias dos limites | 112 |
| 5.3.2 | Limites e o infinito | 113 |
| 5.4 | Indeterminações | 115 |
| 5.5 | Limites notáveis | 121 |
| 5.6 | Funções contínuas | 124 |
| 5.6.1 | Continuidade de uma função num ponto | 124 |
| 5.6.2 | Continuidade lateral | 126 |
| 5.6.3 | Propriedades das funções contínuas num ponto | 127 |
| 5.6.4 | Continuidade da função composta | 127 |
| 5.6.5 | Continuidade num intervalo | 127 |
| 5.6.6 | Teorema de Bolzano | 129 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 5.7 | Assíntotas | 131 |
| 5.8 | Fichas de trabalho multimédia de limites e continuidade | 137 |
| 6 | Derivadas | 149 |
| 6.1 | Nota histórica | 149 |
| 6.2 | Taxa média de variação | 150 |
| 6.3 | Reta tangente | 151 |
| 6.4 | Derivada num ponto | 153 |
| 6.5 | Interpretação geométrica | 154 |
| 6.6 | Derivadas laterais | 156 |
| 6.7 | Derivabilidade e continuidade | 162 |
| 6.8 | Função derivada | 167 |
| 6.9 | Regras de derivação | 169 |
| 6.10 | Derivadas de ordem superior | 176 |
| 6.11 | Aplicações das derivadas | 177 |
| 6.11.1 | Monotonia e extremos | 177 |
| 6.11.2 | Concavidade e pontos de inflexão | 185 |
| 6.12 | Ficha de trabalho multimédia de Cálculo diferencial | 189 |

III

Trigonometria e complexos

| | | |
|----------|--|------------|
| 7 | Trigonometria | 203 |
| 7.1 | Nota histórica | 203 |
| 7.2 | Razões trigonométricas de um ângulo agudo | 205 |
| 7.3 | Ângulos de referência | 208 |
| 7.4 | Ângulo e arco generalizados | 210 |
| 7.5 | O radiano | 214 |
| 7.6 | Círculo trigonométrico | 216 |
| 7.7 | Relações trigonométricas | 219 |
| 7.7.1 | Ângulos suplementares | 219 |
| 7.7.2 | Ângulos que diferem π | 219 |
| 7.7.3 | Ângulos simétricos | 220 |
| 7.7.4 | Ângulos da forma α e $2\pi - \alpha$ | 221 |
| 7.7.5 | Ângulos complementares | 221 |
| 7.7.6 | Ângulos α e $\frac{\pi}{2} + \alpha$ | 222 |
| 7.7.7 | Ângulos α e $\frac{3}{2}\pi - \alpha$ | 223 |
| 7.7.8 | Ângulos α e $\frac{3}{2}\pi + \alpha$ | 224 |
| 7.8 | Fórmulas trigonométricas | 224 |
| 7.8.1 | Fórmulas da soma e diferença de dois ângulos | 227 |

| | | |
|-------------|--|------------|
| 7.9 | Funções trigonométricas | 228 |
| 7.9.1 | Definição e gráfico da função seno | 228 |
| 7.9.2 | Propriedades da função seno | 228 |
| 7.9.3 | Definição e gráfico da função co-seno | 229 |
| 7.9.4 | Propriedades da função co-seno | 229 |
| 7.9.5 | Definição e gráfico da função tangente | 230 |
| 7.9.6 | Propriedades da função tangente | 231 |
| 7.10 | Equações trigonométricas | 233 |
| 7.10.1 | Equações do tipo $\text{sen } x = k$ | 233 |
| 7.10.2 | Equações do tipo $\text{cos } x = k$ | 234 |
| 7.10.3 | Equações do tipo $\text{tg } x = k$ | 235 |
| 7.11 | Limite notável | 237 |
| 7.12 | Derivadas | 239 |
| 7.12.1 | Derivada da função seno | 239 |
| 7.12.2 | Derivada da função co-seno | 240 |
| 7.12.3 | Derivada da função tangente | 241 |
| 7.13 | Ficha de trabalho multimédia de trigonometria | 243 |
| 8 | Números complexos | 257 |
| 8.1 | Introdução | 257 |
| 8.2 | Forma algébrica e representação geométrica de números complexos | 258 |
| 8.3 | Operações com números complexos | 261 |
| 8.4 | Representação de números complexos na forma trigonométrica | 263 |
| 8.5 | Operações com números complexos na forma trigonométrica | 268 |
| 8.5.1 | Multiplicação de números complexos | 269 |
| 8.5.2 | Interpretação geométrica do produto de um número complexo por i | 269 |
| 8.5.3 | Inverso de um número complexo | 270 |
| 8.5.4 | Divisão de números complexos | 271 |
| 8.5.5 | Potenciação de números complexos | 271 |
| 8.5.6 | Radiciação de números complexos | 272 |
| 8.6 | Domínios planos e condições em variável complexa | 274 |
| 8.6.1 | O módulo $ z_1 - z_2 $ como distância entre dois pontos | 275 |
| 8.6.2 | Circunferência no plano complexo | 276 |
| 8.6.3 | Mediatriz de um segmento de reta | 277 |
| 8.6.4 | Retas verticais e retas horizontais | 278 |
| 8.6.5 | Semi-retas | 280 |
| 8.7 | Ficha de trabalho multimédia de complexos | 283 |
| | Bibliografia | 289 |



Combinatória e probabilidades

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Análise combinatória | 13 |
| 1.1 | Introdução | |
| 1.2 | Princípio fundamental da contagem | |
| 1.3 | Permutações | |
| 1.4 | Arranjos sem repetição | |
| 1.5 | Arranjos com repetição | |
| 1.6 | Combinações | |
| 1.7 | Triângulo de Pascal | |
| 1.8 | Binómio de Newton | |
| 1.9 | Ficha de trabalho multimédia de análise combinatória | |
| 2 | Probabilidades | 39 |
| 2.1 | Introdução | |
| 2.2 | Revisão de conjuntos | |
| 2.3 | Experiência aleatória e acontecimentos | |
| 2.4 | Definição de probabilidade | |
| 2.5 | Probabilidade condicionada | |
| 2.6 | Acontecimentos independentes | |
| 2.7 | Ficha de trabalho multimédia de probabilidades | |
| 3 | Distribuição de probabilidades . | 65 |
| 3.1 | Função de probabilidade | |
| 3.2 | Função de probabilidade de uma variável aleatória real discreta | |
| 3.3 | Distribuição Binomial | |
| 3.4 | Distribuição Normal | |
| 3.5 | Ficha de trabalho multimédia de distribuição de probabilidades | |



1. Análise combinatória

1.1 Introdução

Na Teoria de Probabilidades, surge com naturalidade a necessidade de recorrer a técnicas de contagem. Nesse sentido, a Análise Combinatória assume particular interesse.

A Análise Combinatória é um ramo da matemática responsável pela contagem do número de possibilidades de agrupar ou combinar objetos mediante determinadas condições. Há registos de conceitos básicos de combinatória e resultados de enumeração que remontam ao século VI a.C. Na Idade Média, a combinatória continuou a ser estudada, em grande parte fora da civilização europeia. No século IX o matemático indiano Mahavira apresentou fórmulas para o número de permutações e combinações. O triângulo de números conhecido na Europa por Triângulo de Pascal já era conhecido na China e na Índia antes do tempo do matemático francês Pascal (1623-1662). No século XIII, o matemático chinês Yang Hui (1238-1298) apresentou o triângulo e, portanto, ainda é chamado triângulo de Yang Hui na China (ver Figura 1.1). Durante o Renascimento, juntamente com o resto da matemática e das ciências, a combinatória beneficiou de um renascimento. As obras de Pascal, Newton, Jacob Bernoulli e Euler tornaram-se as suas fundações. Mais recentemente, a sua notoriedade foi beneficiada pela publicação da obra “Combinatory Analysis” pelo matemático inglês Percy Alexander MacMahon em 1915. Atualmente, o crescimento da Análise Combinatória é estimulado por novas conexões e aplicações a outros campos, que vão desde a álgebra, a probabilidade, a teoria dos números, etc.

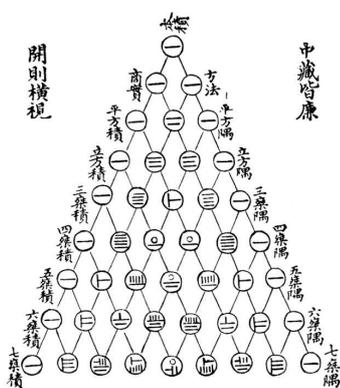


Figura 1.1: Triângulo de Yang Hui

1.2 Princípio fundamental da contagem

VÍDEO — Aula 1

Pode aceder no endereço bit.ly/ACaula1 ao vídeo de exposição da presente secção, o vídeo da Aula 1. Recomendamos que acompanhe a aula com o livro e que o personalize com as suas anotações.

Começamos esta secção com o princípio que está na base da construção das técnicas de contagem apresentadas neste capítulo.

Proposição 1.1 — Princípio fundamental da contagem

Se um acontecimento pode ocorrer de n_1 maneiras diferentes e se, após este acontecimento, um segundo pode ocorrer de n_2 maneiras diferentes e, após este, um terceiro pode ocorrer de n_3 maneiras diferentes,... então o número de maneiras diferentes em que os acontecimentos podem ocorrer na ordem indicada é igual ao produto:

$$n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots$$

Vamos prosseguir com um exemplo.

Exemplo 1.2 — Princípio fundamental da contagem

Alguém esqueceu o código de um cofre. Sabe que tem exatamente as 7 letras de PROJETA, e que a 1.^a é J e a 2.^a é vogal. Quantas experiências vai ter de fazer, se tiver o azar de só acertar na última?

Resolução:

$$\begin{array}{ccccccc} & & A & & & & \\ & & E & & & & \\ J & O & & & & & \\ \hline 1 & 3 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

Terá de fazer $1 \times 3 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 360$ experiências. E se soubesse apenas que tinha as letras de PROJETA?

$$\begin{array}{ccccccc} \hline 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

Teria de fazer $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$ experiências. E se soubesse apenas que tinha 7 letras do alfabeto de 26 letras?

$$\begin{array}{ccccccc} \hline 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 \end{array}$$

Teria de fazer

$$26 \times 26 \times 26 \times 26 \times 26 \times 26 \times 26 = 26^7 = 8031810176$$

experiências.

NOTA

Em problemas de contagem em que a ordem interessa, como no Exemplo 1.2, é habitual recorrermos a esquemas com traços representativos do número de ocorrências de cada acontecimento para auxiliar no raciocínio.

Colocamos na parte inferior de cada traço o número de ocorrências do respetivo acontecimento e por cima as suas possibilidades.

Exemplo 1.3 — Princípio fundamental da contagem

Dados os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5 quantos números de três algarismos diferentes e menores que 300 podemos escrever?

Resolução: Começemos por ilustrar a situação através de um esquema.

$$\begin{array}{ccc} & 2 & \\ & 1 & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{array}$$

Logo há $2 \times 4 \times 3 = 24$ números nas condições referidas.

NOTA

No Exemplo 1.4 optou-se por subtrair ao total o que não interessava. Este raciocínio é particularmente útil quando o número de ocorrências do acontecimento contrário ao que se quer contar é muito superior às ocorrências do acontecimento.

Exemplo 1.4 — Princípio fundamental da contagem

Para um jantar de finalistas (sopa, prato, doce), um restaurante tem, para escolha, 4 sopas, 6 pratos e 7 doces. Quantas ementas diferentes se podem formar, sabendo que o “creme de camarão” não se deve associar com a “açorda de marisco”, nem a “canja” com o “frango assado”.

Resolução: Começemos por ilustrar a situação através de um esquema.

$$\frac{4}{4} \frac{6}{6} \frac{7}{7} - \frac{1}{1} \frac{1}{1} \frac{7}{7} - \frac{1}{1} \frac{1}{1} \frac{7}{7}$$

Logo há $4 \times 6 \times 7 - 1 \times 1 \times 7 - 1 \times 1 \times 7 = 154$ ementas nas condições referidas.

Exercício 1.1

Recomendamos a resolução dos exercícios da Secção 1.9 correspondentes à Aula 1 e a confirmação dos resultados nas suas resoluções em vídeo.

Exercício 1.6

Recomendamos a resolução dos exercícios da Secção 1.9 correspondentes à Aula 5 e a confirmação dos resultados nas suas resoluções em vídeo.

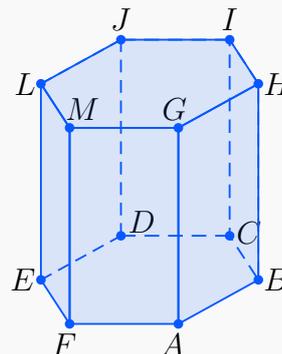
Exercício 1.7 — Dificuldade elevada

No sistema decimal quantos são os números de cinco algarismos diferentes em que aparecem os algarismos 4 e 7 juntos e por esta ordem?

Resolução: A resolução deste exercício está disponível num vídeo no endereço bit.ly/difel22. Pode aceder ao mesmo através das credenciais fornecidas pelo autor do livro. ■

Exercício 1.8 — Dificuldade elevada

Na figura seguinte está representado um prisma hexagonal regular.



1.8.1 Quantos planos é possível definir com os vértices do prisma?

- (A) 1320 (B) 132 (C) 12 (D) 220

1.8.2 Dispondo de 10 cores, de quantas formas é possível pintar o prisma de modo que não fiquem duas faces adjacentes com a mesma cor?

- (A) 15050160 (B) 4062240 (C) 1814400 (D) 45

Resolução: A resolução deste exercício está disponível num vídeo no endereço bit.ly/difel23. Pode aceder ao mesmo através das credenciais fornecidas pelo autor do livro. ■

1.9 Ficha de trabalho multimédia de análise combinatória

AULA 1: Análise Combinatória - Princípio fundamental da contagem

Sumário/pré-requisitos

Análise combinatória:

- Princípio fundamental da contagem;

Pré-requisitos:

O estudante deverá ter conhecimentos gerais de operações numéricas.



Se tiver dificuldades em visualizar a Aula 1 clique em .

- 1.1.  Num restaurante uma ementa é constituída por 4 entradas, 6 pratos e 7 sobremesas. De quantos modos se pode escolher uma refeição formada por uma entrada, um prato e uma sobremesa?
- 1.2.  A Carla tem 3 saias, 4 blusas e 2 pares de sapatilhas. De quantos modos diferentes se pode vestir?
- 1.3.  Quantos códigos Multibanco existem para um cartão?
- 1.4.  Extraem-se sucessivamente duas cartas de um baralho com 52 cartas. Quantos pares de cartas podemos formar sendo:
 - (a) a primeira carta ouros e a segunda espadas?
 - (b) a primeira ouros e a segunda um ás?
 - (c) a primeira figura e a segunda copas?
- 1.5.  Dados os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5
 - (a) Quantos números de três algarismos podemos escrever?
 - (b) Quantos números de três algarismos diferentes podemos escrever?

- (c) Quantos números de três algarismos diferentes e menores que 300 podemos escrever?
- 1.6.  (IN Exame 2001) Capicua é uma sequência de algarismos cuja leitura da direita para a esquerda ou da esquerda para a direita dá o mesmo número. Por exemplo, 75957 e 30003 são capicuas. Quantas capicuas existem com cinco algarismos, sendo o primeiro algarismo ímpar?

AULA 2: Análise Combinatória - Permutações

Sumário/pré-requisitos

Análise combinatória:

- Permutações.

Pré-requisitos:

O estudante deverá ter conhecimentos gerais de operações numéricas e conhecer o princípio fundamental da contagem.



Se tiver dificuldades em visualizar a Aula 2 clique em .

- 2.1.  De quantas maneiras diferentes se podem colocar numa prateleira, em fila, 2 livros de Física e 3 de Matemática
- sem restrições?
 - se os livros ficarem juntos por disciplinas?
- 2.2.  De quantas maneiras diferentes podem sentar-se 7 amigos:
- no balcão de um snack-bar?
 - numa mesa redonda?
 - num banco tendo em conta que a Ana não quer ficar junto do Pedro, seu ex-namorado?
 - numa banco se houver três pessoas que não querem ficar juntas?



4. Funções exponencial e logarítmica

4.1 Função exponencial

A função exponencial é utilizada para modelar uma relação na qual uma variação constante na variável independente implica a mesma variação proporcional na variável dependente. A função exponencial é amplamente utilizada na física, química, engenharia, biologia, economia e matemática e aparece frequentemente associada à função logarítmica, a sua função inversa.

A história da matemática moderna reconhece o matemático suíço Leonard Euler (ver Figura 4.1) como uma referência na função exponencial e nas funções em geral. As suas contribuições no campo da terminologia e notação, em especial para a análise matemática, como a noção de uma função matemática justificam este reconhecimento. Além disso tornou-se célebre por seus trabalhos em mecânica, óptica, e astronomia. Euler é considerado um dos mais proeminentes matemáticos do século XVIII. O Número de Euler, aproximadamente 2.71828, tem esta denominação em homenagem a Euler. Trata-se de um número com aplicações em muitas áreas e, conjuntamente com o π e o número de ouro, recebe frequentemente a denominação de número místico. O número de Euler também é conhecido por número de Napier ou de Neper, um matemático escocês do século XVI, mas a escolha do símbolo e (de Euler) para denotar o número foi mantida em homenagem a Euler. Entre as funções exponenciais mais importantes está a que tem como base o número e . Entre os exemplos de aplicação clássicos estão a taxa de desintegração radioativa, que pode ser utilizada para determinar a



Figura 4.1: Leonard Euler (1707-1783)

idade dos fósseis, e o cálculo financeiro.

4.1.1 Definição e gráfico da função exponencial

VÍDEO — Aula 1

Podemos aceder no endereço bit.ly/ELaula1 ao vídeo de exposição da presente secção, o vídeo da Aula 1. Recomendamos que acompanhe a aula com o livro e que o personalize com as suas anotações.

Definição 4.1 — Definição de função exponencial

Chama-se *função exponencial* à função

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = a^x \end{aligned}$$

onde $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.

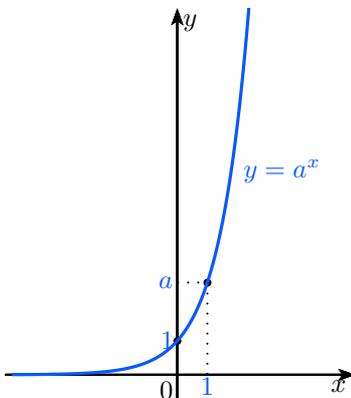


Figura 4.2: Função exponencial definida por $f(x) = a^x$ quando $a > 1$.

Exemplo 4.1 — Funções exponenciais

As funções exponenciais de bases 2, 3 e 1.2 são $y = 2^x$, $y = 3^x$ e $y = 1.2^x$ respetivamente.

Na Figura 4.2 está representado o gráfico de uma função exponencial definida por $f(x) = a^x$ quando $a > 1$.

Podemos observar as seguintes propriedades:

Propriedade 4.1 — Funções exponenciais de base superior a 1

Uma função exponencial de base $a > 1$ definida por $f(x) = a^x$ tem as seguintes propriedades:

- $D_f = \mathbb{R}$
- $D'_f =]0, +\infty[$.
- Consequentemente, f é positiva em \mathbb{R} .
- $f(0) = 1$.
- f é injetiva.
- $y = 0$ é A.H. quando $x \rightarrow -\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$.
- f é crescente em \mathbb{R} .

Exemplo 4.2 — Funções exponenciais de base superior a 1

Na Figura 4.3 estão representados os gráficos de diversas funções exponenciais de base $a > 1$.

em $[a, b]$.

Das propriedades da continuidade num ponto e da função composta resulta que:

- Uma função polinomial é contínua em \mathbb{R} .
- Uma função racional é contínua no seu domínio.
- Uma função exponencial é contínua no seu domínio.
- Uma função logarítmica é contínua no seu domínio.
- A composição de funções contínuas é contínua no seu domínio.

Exemplo 5.23 — Estudo da continuidade

Estude a continuidade de cada uma das seguintes funções definidas por:

- (a) $f(x) = x^4 - 3x + 2$; (b) $g(x) = \frac{x^2 - 4}{2 - x}$;
- (c) $h(x) = e^{x^2 - 3x}$; (d) $i(x) = \ln(4 - x) + 2x$;

$$(e) j(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x}{x} & \text{se } x < 0 \\ x^3 - 3 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

$$(f) l(x) = \begin{cases} \ln(-x + 1) & \text{se } x < 1 \\ 4 & \text{se } x = 1 \\ 8 - x^2 - 3x - \ln x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Resolução:

- (a) Como f é uma função polinomial então é contínua em \mathbb{R} .
- (b) Como g é uma função racional então é contínua no seu domínio $D_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. A Figura 5.20 ilustra a situação.
- (c) A função h é a composição das funções definidas por $f(x) = e^x$ e $g(x) = x^2 - 3x$ uma vez que $h(x) = f(g(x))$. Como $D_h = \mathbb{R}$, podemos concluir que h é contínua em \mathbb{R} .
- (d) Se considerarmos $f(x) = \ln x$, $g(x) = 4 - x$ e $h(x) = 2x$ temos que $i(x) = f(g(x)) + h(x)$. Como i é a soma e a composição de funções contínuas, então i é contínua em $D_i =]-\infty, 4[$. A Figura 5.21 ilustra a situação.
- (e) Para estudar a continuidade no ponto 0 é necessário calcular $\lim_{x \rightarrow 0} j(x)$ através dos limites laterais.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} j(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 3x}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x - 3)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (x - 3) = -3. \end{aligned}$$

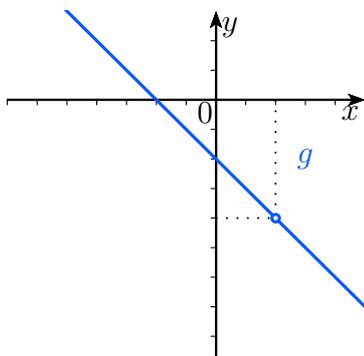


Figura 5.20: Gráfico de $y = \frac{x^2 - 4}{2 - x}$

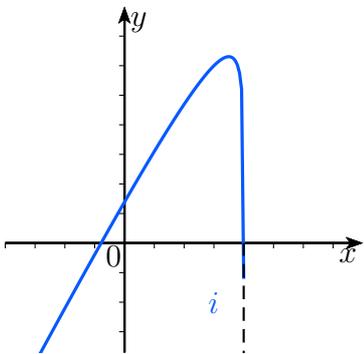


Figura 5.21: Gráfico de $y = \ln(4 - x) + 2x$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} j(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^3 - 3) = 0 - 3 = -3 = l(0).$$

Conseqüentemente, $\lim_{x \rightarrow 0} j(x) = -3 = l(0)$ e l é contínua em $x = 0$.

Para $x < 0$ a função j está definida por uma função racional contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Conseqüentemente j é contínua em $] -\infty, 0[$.

Para $x > 0$ a função j está definida por uma função polinomial contínua em \mathbb{R} . Conseqüentemente j é contínua em $]0, +\infty[$.

Do exposto, podemos concluir que j é contínua em \mathbb{R} . A Figura 5.22 ilustra a situação.

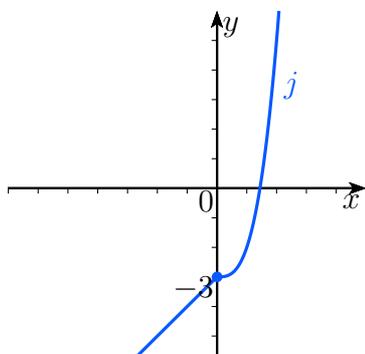


Figura 5.22: Gráfico de $y = j(x)$ do Exemplo 5.23

- (f) Para estudar a continuidade no ponto 1 é necessário calcular $\lim_{x \rightarrow 1} l(x)$ através dos limites laterais.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} l(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(-x + 1) = \ln(0^+) = -\infty.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} l(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (8 - x^2 - 3x - \ln x) = 8 - 1^2 - 3 \times 1 - \ln 1 \\ &= 4 = l(1). \end{aligned}$$

Conseqüentemente, $\lim_{x \rightarrow 1} l(x)$ não existe e l não é contínua em $x = 1$.

Para $x < 1$ a função l está definida pela composição das funções definidas por $y = \ln x$ e $y = -x + 1$. Conseqüentemente l é contínua em $] -\infty, 1[$.

Para $x > 1$ a função l está definida pela diferença de uma função polinomial, contínua em \mathbb{R} , com uma função logarítmica, contínua em $]0, +\infty[$. Conseqüentemente l é contínua em $]1, +\infty[$.

Do exposto, podemos concluir que l é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. A Figura 5.23 ilustra a situação.

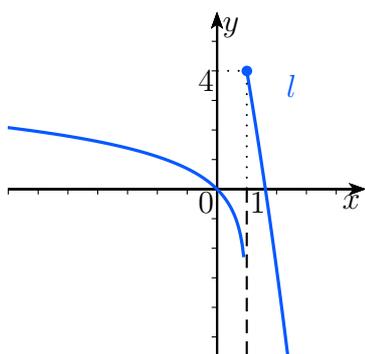


Figura 5.23: Gráfico de $y = l(x)$ do Exemplo 5.23

Exercício 5.7

Recomendamos a resolução dos exercícios da Seção 5.8 correspondentes à Aula 6 e a confirmação dos resultados nas suas resoluções em vídeo.

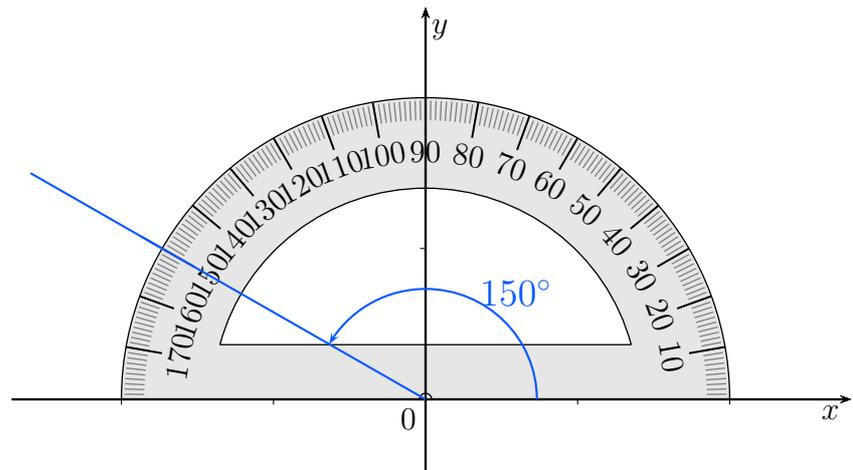


Figura 7.17: Representação num referencial de um ângulo de amplitude 150°

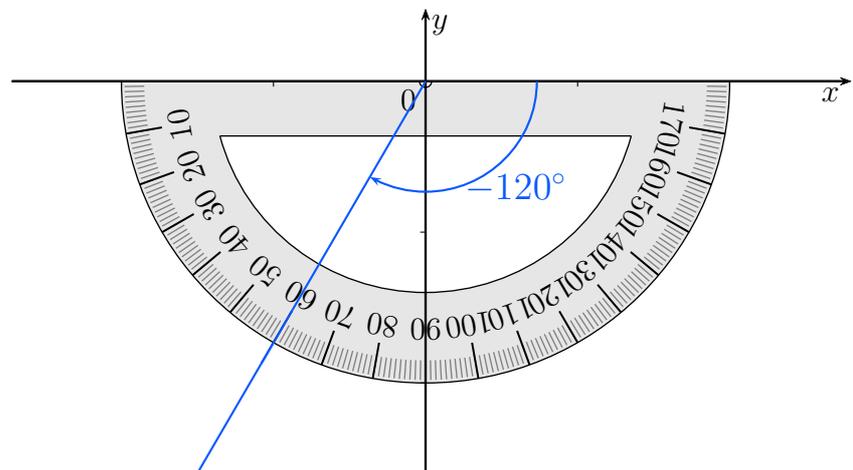


Figura 7.18: Representação num referencial de um ângulo de amplitude -120°

NOTA

Para representar num referencial um ângulo β com amplitude não pertencente a $[0, 360^\circ[$ devemos encontrar um ângulo $\alpha \in [0, 360^\circ[$ tal que

$$\beta = \alpha + k \times 360^\circ$$

para algum $k \in \mathbb{Z}$. Um dos métodos para obter α é ir subtraindo ou adicionando a β múltiplos de 360° .

Exemplo 7.5 — Ângulo com amplitude superior a 360°

Representemos num referencial o ângulo de amplitude 510° .

Como $510^\circ = 150^\circ + 360^\circ$ então vamos ter uma volta completa mais 150° .

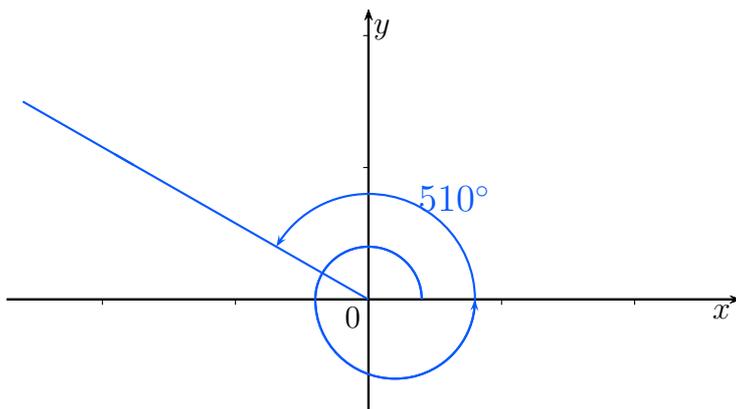


Figura 7.19: Representação num referencial de um ângulo de amplitude 510°

Exemplo 7.6 — Expressão geral dos ângulos

A expressão geral dos ângulos com o mesmo lado origem e lado extremidade que 35° , 150° e -120° é respetivamente:

- $35^\circ + k \times 360^\circ$
- $150^\circ + k \times 360^\circ$
- $-120^\circ + k \times 360^\circ$

onde $k \in \mathbb{Z}$.

Exercício 7.3

Recomendamos a resolução dos exercícios da Secção 7.13 correspondentes à Aula 3 e a confirmação dos resultados nas suas resoluções em vídeo.

7.5 O radiano

VÍDEO — Aula 4

Pode aceder no endereço bit.ly/TRIGaula4 ao vídeo de exposição da presente secção, o vídeo da Aula 4. Recomendamos que acompanhe a aula com o livro e que o personalize com as suas anotações.

Para medir amplitudes de ângulos e de arcos utilizou-se até agora o sistema sexagesimal, cuja unidade é o grau. Outro sistema de medida é o *sistema circular*, cuja unidade é o *radiano*.

Definição 7.1 — Radiano

Um *radiano* (rad) é a amplitude do ângulo ao centro correspondente a um arco de circunferência de comprimento igual ao raio (ver Figura 7.20).

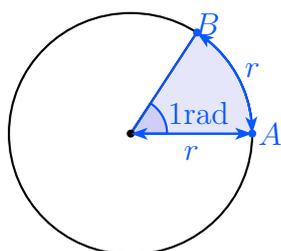


Figura 7.20: 1 radiano

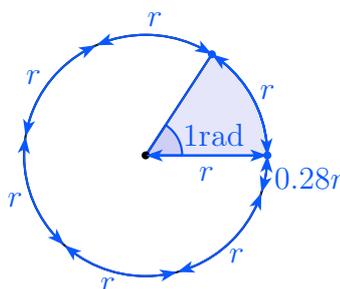


Figura 7.21: Número de raios que fazem o perímetro de uma circunferência

Atendendo a que o perímetro de uma circunferência de raio r é $2\pi r$ e que um arco de comprimento r tem amplitude de 1 rad , uma circunferência tem amplitude $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ radianos. Na Figura 7.21 ilustramos a situação.

No sistema sexagesimal a amplitude de uma circunferência é de 360° .

Fica assim estabelecida a relação que permite converter graus em radianos e radianos em graus: $2\pi \text{ rad} = 360^\circ$. Consequentemente,

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ \text{ e } 1 \text{ rad} \approx 57^\circ.$$

Exemplo 7.7 — Conversão de graus para radianos

Convertamos em radianos 30° e -145° .

A regra de três simples

$$\begin{array}{r} \pi \text{ ——— } 180 \\ x \text{ ——— } 30 \end{array}$$

$$\text{conduz-nos a } \frac{x}{\pi} = \frac{30}{180} \Leftrightarrow x = \frac{30\pi}{180} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{Podemos concluir que } 30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ rad.}$$

A regra de três simples

$$\begin{array}{r} \pi \text{ ——— } 180 \\ x \text{ ——— } -145 \end{array}$$

$$\text{conduz-nos a } \frac{x}{\pi} = -\frac{145}{180} \Leftrightarrow x = -\frac{145\pi}{180} \Leftrightarrow x = -\frac{29}{36}\pi.$$

$$\text{Podemos concluir que } -145^\circ = -\frac{29}{36}\pi \text{ rad.}$$

Exemplo 7.8 — Conversão de radianos para graus

Convertamos em graus $\frac{2}{3}\pi \text{ rad}$ e 2.5 rad .

A regra de três simples

$$\begin{array}{r} \pi \text{ ——— } 180 \\ \frac{2}{3}\pi \text{ ——— } x \end{array}$$

$$\text{conduz-nos a } \frac{x}{180} = \frac{\frac{2}{3}\pi}{\pi} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \times 180 \Leftrightarrow x = 120.$$

- $|z - z_1| \geq r$ representam os pontos exteriores à circunferência centrada no afixo de z_1 e com raio r juntamente com a circunferência.

Exemplo 8.27 — Região no plano de Argand

Representemos no plano complexo os conjuntos de pontos definidos pelas condições $|z - 3 - i| = 2$, $|z - 3 - i| \leq 2$ e $|z - 3 - i| > 2$.

Começemos por escrever as condições na forma $|z - (3 + i)| = 2$, $|z - (3 + i)| \leq 2$ e $|z - (3 + i)| > 2$ para concluir que o afixo de $3 + i$ é o centro da circunferência envolvida nas três regiões.

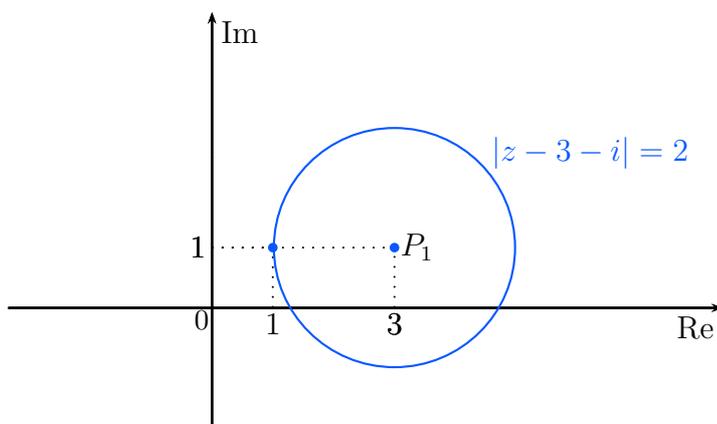


Figura 8.21: Representação no plano de Argand da condição $|z - (3 + i)| = 2$

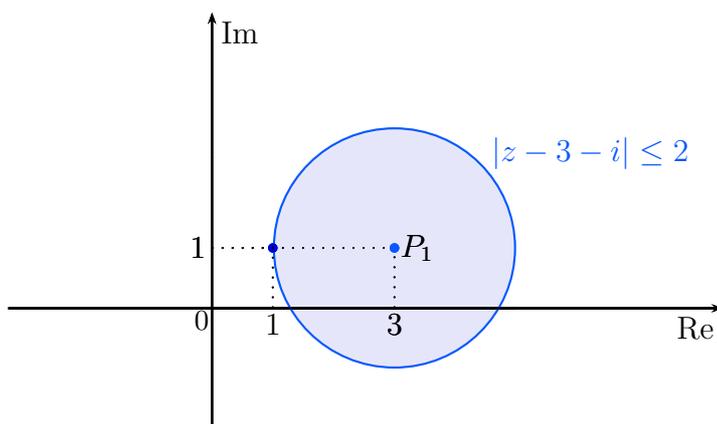


Figura 8.22: Representação no plano de Argand da condição $|z - (3 + i)| \leq 2$

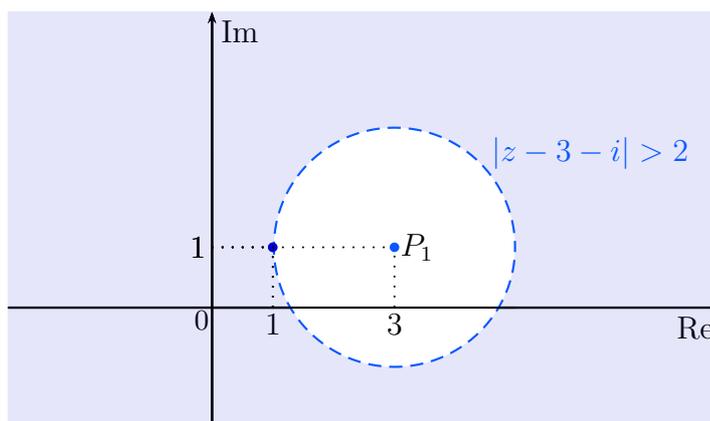


Figura 8.23: Representação no plano de Argand da condição $|z - (3 + i)| > 2$

8.6.3 Mediatriz de um segmento de reta

Recordemos que no plano, a mediatriz de um segmento de reta $[AB]$ é o lugar geométrico dos pontos equidistantes de A e de B . Gráficamente, é uma reta perpendicular a $[AB]$ e que contém o seu ponto médio. No que se segue, apresentamos condições que envolvem a mediatriz de um segmento de reta no plano complexo.

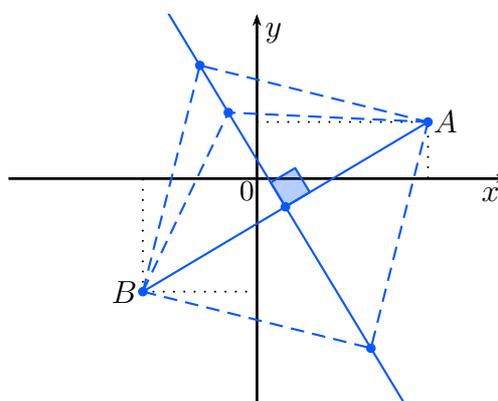


Figura 8.24: Mediatriz de um segmento de reta.

Proposição 8.28 — Mediatriz de um segmento de reta

Consideremos os números complexos z_1 e z_2 e os seus afixos P_1 e P_2 , respetivamente. Os afixos dos números complexos que satisfazem a condição: