MATEMÁTICA 12 MULTIMÉDIA

Rui Castanheira de Paiva

Academia Aberta

Introdução

A ideia base desta obra é abordar o 12.º ano de matemática através de um livro de texto acompanhado com vídeos tutoriais.

Deste modo, o livro está associado a:

- 58 aulas teóricas em vídeo;
- 171 exemplos de aplicação dos conceitos teóricos em vídeo;
- 456 exercícios de treino com resolução passo a passo em vídeo.

Ao longo do livro são indicados os endereços web:

- das aulas teóricas em vídeo que acompanham cada secção;
- dos exercícios com resolução em vídeo de acesso gratuito da Academia Aberta (www.academiaaberta.pt e www.facebook.com/aaberta);
- dos exercícios com resolução em vídeo com um grau de dificuldade mais elevado, disponíveis através de credenciais fornecidas aos compradores do livro. As credenciais são válidas por 2 anos para um único utilizador (pode comprar em bit.ly/detalhesdaobra).

A acrescentar ao trabalho de elaboração desta obra, há também o trabalho que os seus conteúdos dão a estudar! Termino com uma frase que me serve de apoio e que recomendo a todos os estudantes:

"Considero feliz aquele que quando se fala de êxito procura a resposta no seu trabalho." (Ralph Waldo Emerson)

Desejo o maior sucesso a todos!

O autor, Rui Paiva
Home page: bit.ly/cvruicpaiva

Conteúdo

I Combinatória e probabilidades

I

Combinatória e probabilidades

1. Análise combinatória

1.1 Introdução

Na Teoria de Probabilidades, surge com naturalidade a necessidade de recorrer a técnicas de contagem. Nesse sentido, a Análise Combinatória assume particular interesse.

A Análise Combinatória é um ramo da matemática responsável pela contagem do número de possibilidades de agrupar ou combinar objetos mediante determinadas condições. Há registos de conceitos básicos de combinatória e resultados de enumeração que remontam ao século VI a.C. Na Idade Média, a combinatória continuou a ser estudada, em grande parte fora da civilização europeia. No século IX o matemático indiano Mahavira apresentou fórmulas para o número de permutações e combinações. O triângulo de números conhecido na europa por Triângulo de Pascal já era conhecido na China e na Índia antes do tempo do matemático francês Pascal (1623-1662). No século XIII, o matemático chinês Yang Hui (1238-1298) apresentou o triângulo e, portanto, ainda é chamado triângulo de Yang Hui na China (ver Figura 1.1). Durante o Renascimento, juntamente com o resto da matemática e das ciências, a combinatória beneficiou de um renascimento. As obras de Pascal, Newton, Jacob Bernoulli e Euler tornaram-se as suas fundações. Mais recentemente, a sua notoriedade foi beneficiada pela publicação da obra "Combinatory Analysis" pelo matemático inglês Percy Alexander MacMahon em 1915. Atualmente, o crescimento da Análise Combinatória é estimulado por novas conexões e aplicações a outros campos, que vão desde a álgebra, a probabilidade, a teoria dos números, etc.

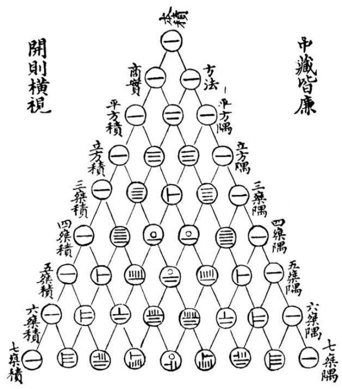


Figura 1.1: Triângulo de Yang Hui

1.2 Principio fundamental da contagem

VÍDEO — Aula 1
Pode aceder no endereço bit.ly/ACaula1 ao vídeo de exposição da presente secção, o vídeo da Aula 1. Recomendamos que acompanhe a aula com o livro e que o personalize com as suas anotações.

Começamos esta secção com o princípio que está na base da construção das técnicas de contagem apresentadas neste capítulo.

Proposição 1.1 — Principio fundamental da contagem
Se um acontecimento pode ocorrer de n_1 maneiras diferentes e se, após este acontecimento, um segundo pode ocorrer de n_2 maneiras diferentes e, após este, um terceiro pode ocorrer de n_3 maneiras diferentes,... então o número de maneiras diferentes em que os acontecimentos podem ocorrer na ordem indicada é igual ao produto:

$$n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots$$

Vamos prosseguir com um exemplo.

NOTA
Em problemas de contagem em que a ordem interessa, como no Exemplo 1.2, é habitual recorrermos a esquemas com traços representativos do número de ocorrências de cada acontecimento para auxiliar no raciocínio.
Colocamos na parte inferior de cada traço o número de ocorrências do respetivo acontecimento e por cima as suas possibilidades.

Exemplo 1.2 — Princípio fundamental da contagem
Alguém esqueceu o código de um cofre. Sabe que tem exatamente as 7 letras de PROJETA, e que a 1.ª é J e a 2.ª é vogal. Quantas experiências vai ter de fazer, se tiver o azar de só acertar na última?

Resolução:

$$\begin{array}{ccccccc} & \text{A} & & & & & \\ & \text{E} & & & & & \\ \text{J} & \text{O} & & & & & \\ \hline 1 & 3 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

Terá de fazer $1 \times 3 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 360$ experiências.
E se soubesse apenas que tinha as letras de PROJETA?

$$\begin{array}{ccccccc} \hline 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

Teria de fazer $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$ experiências.
E se soubesse apenas que tinha 7 letras do alfabeto de 26 letras?

$$\begin{array}{ccccccc} \hline 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 \end{array}$$

Teria de fazer

$$26 \times 26 \times 26 \times 26 \times 26 \times 26 \times 26 = 26^7 = 8031810176$$

experiências. ■

Exemplo 1.3 — Princípio fundamental da contagem
Dados os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5 quantos números de três algarismos diferentes e menores que 300 podemos escrever?

Resolução: Comecemos por ilustrar a situação através de um esquema.

$$\underset{2}{\overset{\substack{2\\1}}{\underline{}}}\quad \underset{4}{\underline{}}\quad \underset{3}{\underline{}}$$

Logo há $2 \times 4 \times 3 = 24$ números nas condições referidas.

Exemplo 1.4 — Princípio fundamental da contagem
Para um jantar de finalistas (sopa, prato, doce), um restaurante tem, para escolha, 4 sopas, 6 pratos e 7 doces. Quantas ementas diferentes se podem formar, sabendo que o "creme de camarão" não se deve associar com a "açorda de marisco", nem a "canja" com o "frango assado".

Resolução: Comecemos por ilustrar a situação através de um esquema.

$$\overline{4}\ \ \overline{6}\ \ \overline{7}\quad - \quad \overline{1}\ \ \overline{1}\ \ \overline{7}\quad - \quad \overline{1}\ \ \overline{1}\ \ \overline{7}$$

Logo há $4 \times 6 \times 7 - 1 \times 1 \times 7 - 1 \times 1 \times 7 = 154$ ementas nas condições referidas.

NOTA
No Exemplo 1.4 optou-se por subtrair ao total o que não interessava. Este raciocínio é particularmente útil quando o número de ocorrências do acontecimento contrário ao que se quer contar é muito superior às ocorrências do acontecimento.

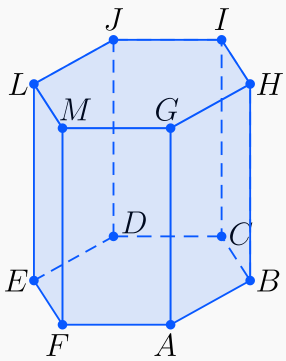
Exercício 1.1
Recomendamos a resolução dos exercícios da Secção 1.9 correspondentes à Aula 1 e a confirmação dos resultados nas suas resoluções em vídeo.

Exercício 1.6
Recomendamos a resolução dos exercícios da Secção 1.9 correspondentes à Aula 5 e a confirmação dos resultados nas suas resoluções em vídeo.

Exercício 1.7 — Dificuldade elevada
No sistema decimal quantos são os números de cinco algarismos diferentes em que aparecem os algarismos 4 e 7 juntos e por esta ordem?

Resolução: A resolução deste exercício está disponível num vídeo no endereço bit.ly/difel22. Pode aceder ao mesmo através das credenciais fornecidas pelo autor do livro. ■

Exercício 1.8 — Dificuldade elevada
Na figura seguinte está representado um prisma hexagonal regular.



1.8.1 Quantos planos é possível definir com os vértices do prisma?

(A) 1320 **(B)** 132 **(C)** 12 **(D)** 220

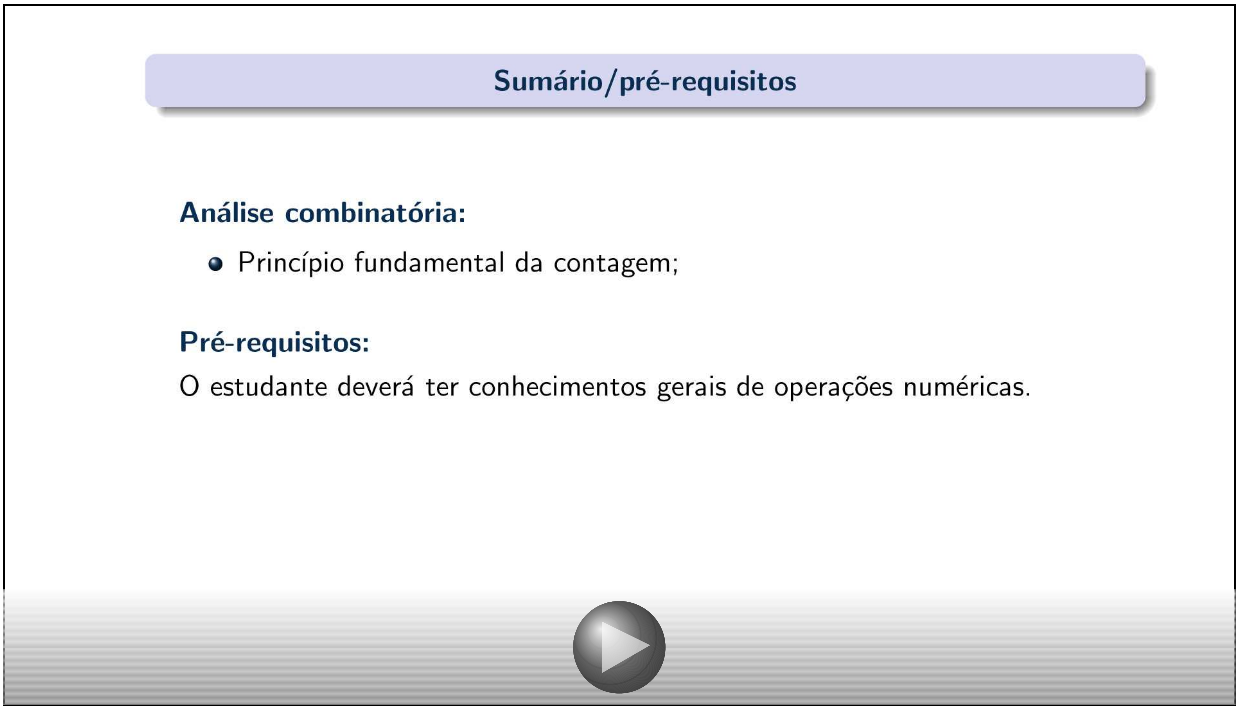
1.8.2 Dispondo de 10 cores, de quantas formas é possível pintar o prisma de modo que não fiquem duas faces adjacentes com a mesma cor?

(A) 15050160 **(B)** 4062240 **(C)** 1814400 **(D)** 45

Resolução: A resolução deste exercício está disponível num vídeo no endereço bit.ly/difel23. Pode aceder ao mesmo através das credenciais fornecidas pelo autor do livro. ■

1.9 Ficha de trabalho multimédia de análise combinatória

AULA 1: Análise Combinatória - Princípio fundamental da contagem



Se tiver dificuldades em visualizar a Aula 1 clique em .

1.1. Num restaurante uma ementa é constituída por 4 entradas, 6 pratos e 7 sobremesas. De quantos modos se pode escolher uma refeição formada por uma entrada, um prato e uma sobremesa?

1.2. A Carla tem 3 saias, 4 blusas e 2 pares de sapatilhas. De quantos modos diferentes se pode vestir?

1.3. Quantos códigos Multibanco existem para um cartão?

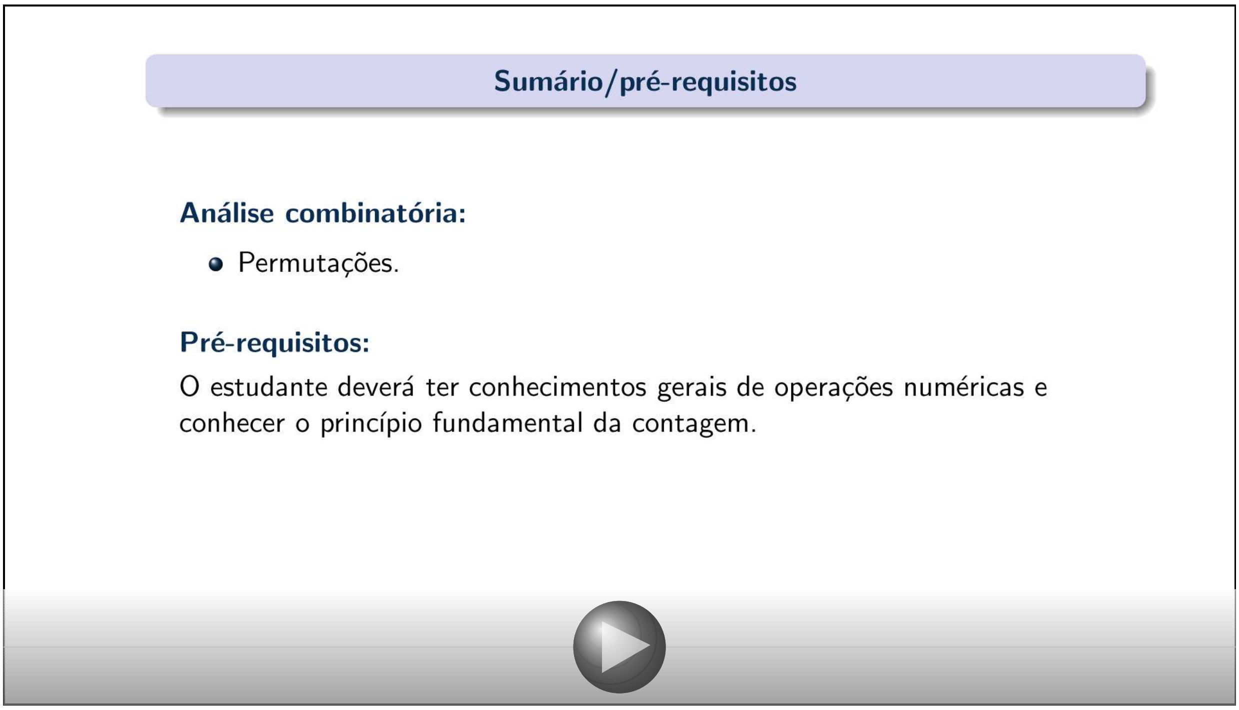
1.4. Extraem-se sucessivamente duas cartas de um baralho com 52 cartas. Quantos pares de cartas podemos formar sendo:
   (a) a primeira carta ouros e a segunda espadas?
   (b) a primeira ouros e a segunda um ás?
   (c) a primeira figura e a segunda copas?

1.5. Dados os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5
   (a) Quantos números de três algarismos podemos escrever?
   (b) Quantos números de três algarismos diferentes podemos escrever?

(c) Quantos números de três algarismos diferentes e menores que 300 podemos escrever?

1.6. (*IN Exame 2001*) Capicua é uma sequência de algarismos cuja leitura da direita para a esquerda ou da esquerda para a direita dá o mesmo número. Por exemplo, 75957 e 30003 são capicuas. Quantas capicuas existem com cinco algarismos, sendo o primeiro algarismo ímpar?

AULA 2: Análise Combinatória - Permutações



Se tiver dificuldades em visualizar a Aula 2 clique em .

2.1. De quantas maneiras diferentes se podem colocar numa prateleira, em fila, 2 livros de Física e 3 de Matemática
(a) sem restrições?
(b) se os livros ficarem juntos por disciplinas?

2.2. De quantas maneiras diferentes podem sentar-se 7 amigos:
(a) no balcão de um snack-bar?
(b) numa mesa redonda?
(c) num banco tendo em conta que a Ana não quer ficar junto do Pedro, seu ex-namorado?
(d) numa banco se houver três pessoas que não querem ficar juntas?

4. Funções exponencial e logarítmica

4.1 Função exponencial

A função exponencial é utilizada para modelar uma relação na qual uma variação constante na variável independente implica a mesma variação proporcional na variável dependente. A função exponencial é amplamente utilizada na física, química, engenharia, biologia, economia e matemática e aparece frequentemente associada à função logarítmica, a sua função inversa.

Figura 4.1: Leonard Euler (1707-1783)

A história da matemática moderna reconhece o matemático suíço Leonard Euler (ver Figura 4.1) como uma referência na função exponencial e nas funções em geral. As suas contribuições no campo da terminologia e notação, em especial para a análise matemática, como a noção de uma função matemática justificam este reconhecimento. Além disso tornou-se célebre por seus trabalhos em mecânica, óptica, e astronomia. Euler é considerado um dos mais proeminentes matemáticos do século XVIII. O Número de Euler, aproximadamente 2.71828, tem esta denominação em homenagem a Euler. Trata-se de um número com aplicações em muitas áreas e, conjuntamente com o π e o número de ouro, recebe frequentemente a denominação de número místico. O número de Euler também é conhecido por número de Napier ou de Neper, um matemático escocês do século XVI, mas a escolha do símbolo e (de Euler) para denotar o número foi mantida em homenagem a Euler. Entre as funções exponenciais mais importantes está a que tem como base o número e. Entre os exemplos de aplicação clássicos estão a taxa de desintegração radioativa, que pode ser utilizada para determinar a idade dos fósseis, e o cálculo financeiro.

4.1.1 Definição e gráfico da função exponencial

VÍDEO — Aula 1
Pode aceder no endereço bit.ly/ELaula1 ao vídeo de exposição da presente secção, o vídeo da Aula 1. Recomendamos que acompanhe a aula com o livro e que o personalize com as suas anotações.

Definição 4.1 — Definição de função exponencial
Chama-se *função exponencial* à função

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = a^x \end{aligned}$$

onde $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.

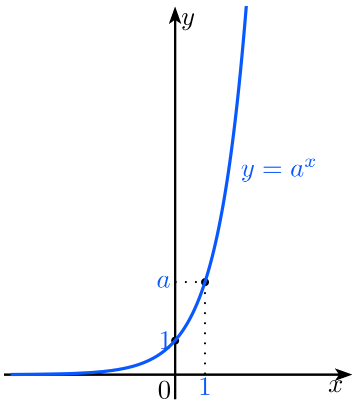


Figura 4.2: Função exponencial definida por $f(x) = a^x$ quando $a > 1$.

Exemplo 4.1 — Funções exponenciais
As funções exponenciais de bases 2, 3 e 1.2 são $y = 2^x$, $y = 3^x$ e $y = 1.2^x$ respetivamente.

Na Figura 4.2 está representado o gráfico de uma função exponencial definida por $f(x) = a^x$ quando $a > 1$.

Podemos observar as seguintes propriedades:

Propriedade 4.1 — Funções exponenciais de base superior a 1
Uma função exponencial de base $a > 1$ definida por $f(x) = a^x$ tem as seguintes propriedades:

- $D_f = \mathbb{R}$
- $D'_f =]0, +\infty[$.
- Consequentemente, f é positiva em $\mathbb{R}$.
- $f(0) = 1$.
- f é injetiva.
- $y = 0$ é A.H. quando $x \to -\infty$.
- $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$.
- f é crescente em $\mathbb{R}$.

Exemplo 4.2 — Funções exponenciais de base superior a 1
Na Figura 4.3 estão representados os gráficos de diversas funções exponenciais de base $a > 1$.

em $[a,b]$.

Das propriedades da continuidade num ponto e da função composta resulta que:

- Uma função polinomial é contínua em $\mathbb{R}$.
- Uma função racional é contínua no seu domínio.
- Uma função exponencial é contínua no seu domínio.
- Uma função logarítmica é contínua no seu domínio.
- A composição de funções contínuas é contínua no seu domínio.

Exemplo 5.23 — Estudo da continuidade

Estude a continuidade de cada uma das seguintes funções definidas por:

(a) $f(x) = x^4 - 3x + 2$; (b) $g(x) = \dfrac{x^2-4}{2-x}$;

(c) $h(x) = e^{x^2-3x}$; (d) $i(x) = \ln(4-x) + 2x$;

(e) $j(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-3x}{x} & \text{se } x < 0 \\ x^3 - 3 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

(f) $l(x) = \begin{cases} \ln(-x+1) & \text{se } x < 1 \\ 4 & \text{se } x = 1 \\ 8 - x^2 - 3x - \ln x & \text{se } x > 1 \end{cases}$

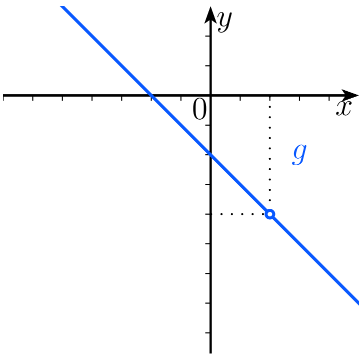


Figura 5.20: Gráfico de $y = \dfrac{x^2-4}{2-x}$

Resolução:

(a) Como f é uma função polinomial então é contínua em $\mathbb{R}$.

(b) Como g é uma função racional então é contínua no seu domínio $D_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. A Figura 5.20 ilustra a situação.

(c) A função h é a composição das funções definidas por $f(x) = e^x$ e $g(x) = x^2 - 3x$ uma vez que $h(x) = f(g(x))$. Como $D_h = \mathbb{R}$, podemos concluir que h é contínua em $\mathbb{R}$.

(d) Se considerarmos $f(x) = \ln x$, $g(x) = 4 - x$ e $h(x) = 2x$ temos que $i(x) = f(g(x)) + h(x)$. Como i é a soma e a composição de funções contínuas, então i é contínua em $D_i =]-\infty, 4[$. A Figura 5.21 ilustra a situação.

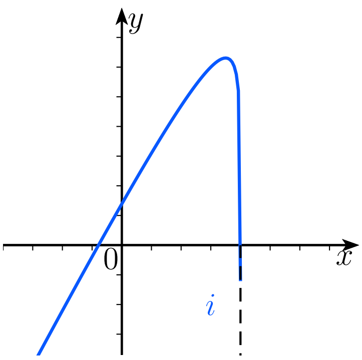


Figura 5.21: Gráfico de $y = \ln(4-x) + 2x$

(e) Para estudar a continuidade no ponto 0 é necessário calcular $\lim\limits_{x\to 0} j(x)$ através dos limites laterais.

$$\lim_{x\to 0^-} j(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2-3x}{x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{x(x-3)}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0^-} (x-3) = -3.$$

$$\lim_{x \to 0^+} j(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(x^3 - 3\right) = 0 - 3 = -3 = l(0).$$

Consequentemente, $\lim_{x \to 0} j(x) = -3 = l(0)$ e l é contínua em $x = 0$.

Para $x < 0$ a função j está definida por uma função racional contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Consequentemente j é contínua em $]-\infty, 0[$.

Para $x > 0$ a função j está definida por uma função polinomial contínua em $\mathbb{R}$. Consequentemente j é contínua em $]0, +\infty[$.

Do exposto, podemos concluir que j é contínua em $\mathbb{R}$. A Figura 5.22 ilustra a situação.

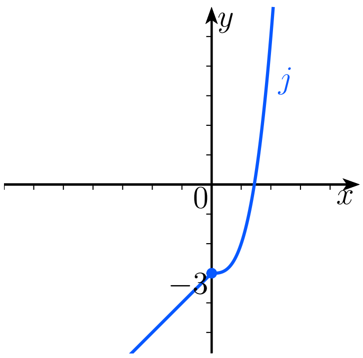


Figura 5.22: Gráfico de $y = j(x)$ do Exemplo 5.23

(f) Para estudar a continuidade no ponto 1 é necessário calcular $\lim_{x \to 1} l(x)$ através dos limites laterais.

$$\lim_{x \to 1^-} l(x) = \lim_{x \to 1^-} \ln(-x + 1) = \ln(0^+) = -\infty.$$

$$\lim_{x \to 1^+} l(x) = \lim_{x \to 1^+} \left(8 - x^2 - 3x - \ln x\right) = 8 - 1^2 - 3 \times 1 - \ln 1$$
$$= 4 = l(1).$$

Consequentemente, $\lim_{x \to 1} l(x)$ não existe e l não é contínua em $x = 1$.

Para $x < 1$ a função l está definida pela composição das funções definidas por $y = \ln x$ e $y = -x + 1$. Consequentemente l é contínua em $]-\infty, 1[$.

Para $x > 1$ a função l está definida pela diferença de uma função polinomial, contínua em $\mathbb{R}$, com uma função logarítmica, contínua em $]0, +\infty[$. Consequentemente l é contínua em $]1, +\infty[$.

Do exposto, podemos concluir que l é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. A Figura 5.23 ilustra a situação.

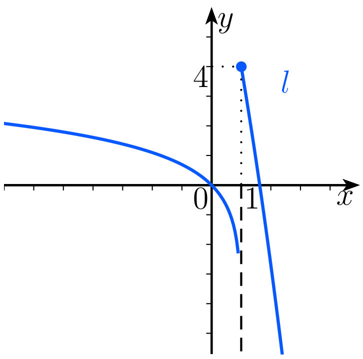


Figura 5.23: Gráfico de $y = l(x)$ do Exemplo 5.23

Exercício 5.7
Recomendamos a resolução dos exercícios da Secção 5.8 correspondentes à Aula 6 e a confirmação dos resultados nas suas resoluções em vídeo.

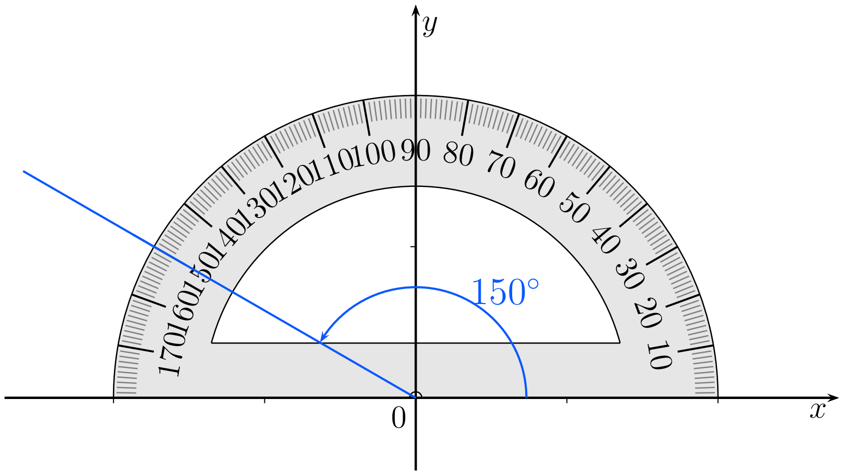


Figura 7.17: Representação num referencial de um ângulo de amplitude 150°

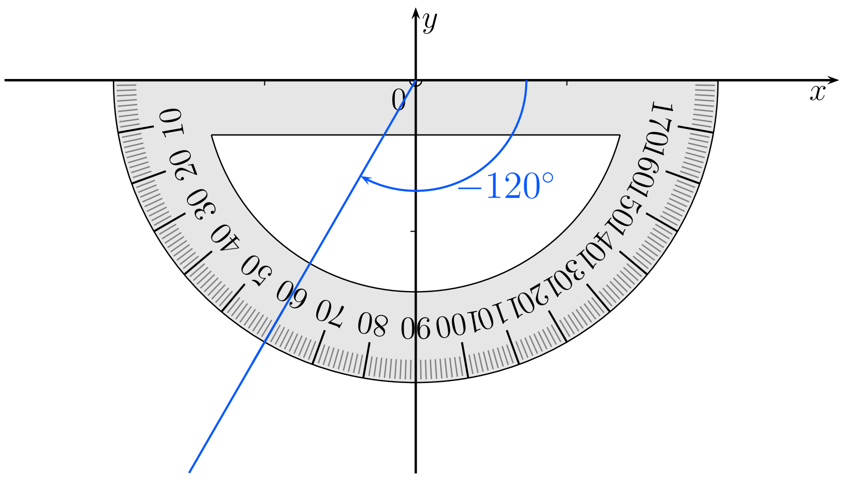


Figura 7.18: Representação num referencial de um ângulo de amplitude −120°

NOTA
Para representar num referencial um ângulo β com amplitude não pertencente a $[0, 360°[$ devemos encontrar um ângulo $\alpha \in [0, 360°[$ tal que

$$\beta = \alpha + k \times 360°$$

para algum $k \in \mathbb{Z}$. Um dos métodos para obter α é ir subtraindo ou adicionando a β múltiplos de 360°.

Exemplo 7.5 — Ângulo com amplitude superior a 360°
Representemos num referencial o ângulo de amplitude 510°.

Como 510° = 150° + 360° então vamos ter uma volta completa mais 150°.

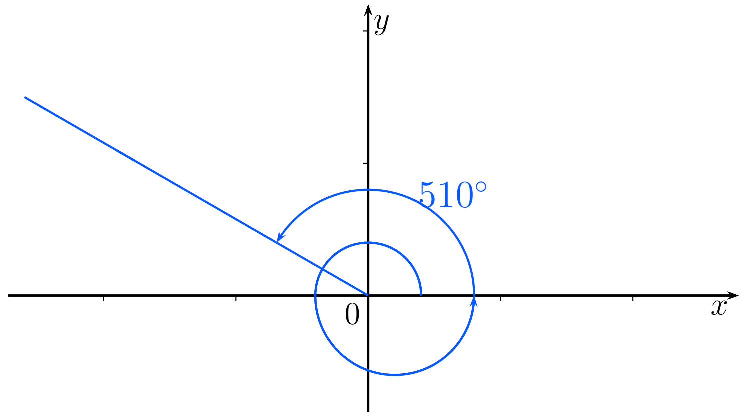


Figura 7.19: Representação num referencial de um ângulo de amplitude 510°

Exemplo 7.6 — Expressão geral dos ângulos
A expressão geral dos ângulos com o mesmos lado origem e lado extremidade que 35°, 150° e −120° é respetivamente:

- $35° + k \times 360°$
- $150° + k \times 360°$
- $-120° + k \times 360°$

onde $k \in \mathbb{Z}$.

Exercício 7.3
Recomendamos a resolução dos exercícios da Secção 7.13 correspondentes à Aula 3 e a confirmação dos resultados nas suas resoluções em vídeo.

7.5 O radiano

VÍDEO — Aula 4
Pode aceder no endereço bit.ly/TRIGaula4 ao vídeo de exposição da presente secção, o vídeo da Aula 4. Recomendamos que acompanhe a aula com o livro e que o personalize com as suas anotações.

Para medir amplitudes de ângulos e de arcos utilizou-se até agora o sistema sexagesimal, cuja unidade é o grau. Outro sistema de medida é o *sistema circular*, cuja unidade é o *radiano*.

Definição 7.1 — Radiano
Um *radiano* (rad) é a amplitude do ângulo ao centro correspondente a um arco de circunferência de comprimento igual ao raio (ver Figura 7.20).

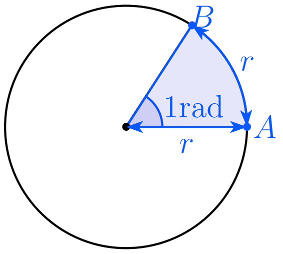


Figura 7.20: 1 radiano

Atendendo a que o perímetro de uma circunferência de raio r é $2\pi r$ e que um arco de comprimento r tem amplitude de 1 rad, uma circunferência tem amplitude $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ radianos. Na Figura 7.21 ilustramos a situação.

No sistema sexagesimal a amplitude de uma circunferência é de $360°$.

Fica assim estabelecida a relação que permite converter graus em radianos e radianos em graus: $2\pi\ rad = 360°$. Consequentemente,

$$\pi\ rad = 180° \text{ e } 1\ rad \approx 57°.$$

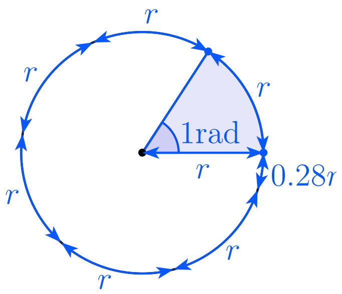


Figura 7.21: Número de raios que fazem o perímetro de uma circunferência

Exemplo 7.7 — Conversão de graus para radianos

Convertamos em radianos $30°$ e $-145°$.

A regra de três simples

$$\begin{array}{ccc} \pi & \text{———} & 180 \\ x & \text{———} & 30 \end{array}$$

conduz-nos a $\frac{x}{\pi} = \frac{30}{180} \Leftrightarrow x = \frac{30\pi}{180} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}$.

Podemos concluir que $30° = \frac{\pi}{6}\ rad$.

A regra de três simples

$$\begin{array}{ccc} \pi & \text{———} & 180 \\ x & \text{———} & -145 \end{array}$$

conduz-nos a $\frac{x}{\pi} = -\frac{145}{180} \Leftrightarrow x = -\frac{145\pi}{180} \Leftrightarrow x = -\frac{29}{36}\pi$.

Podemos concluir que $-145° = -\frac{29}{36}\pi\ rad$.

Exemplo 7.8 — Conversão de radianos para graus

Convertamos em graus $\frac{2}{3}\pi\ rad$ e $2.5\ rad$.

A regra de três simples

$$\begin{array}{ccc} \pi & \text{———} & 180 \\ \frac{2}{3}\pi & \text{———} & x \end{array}$$

conduz-nos a $\frac{x}{180} = \frac{\frac{2}{3}\pi}{\pi} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \times 180 \Leftrightarrow x = 120$.

- $|z - z_1| \geq r$ representam os pontos exteriores à circunferência centrada no afixo de z_1 e com raio r juntamente com a circunferência.

Exemplo 8.27 — Região no plano de Argand
Representemos no plano complexo os conjuntos de pontos definidos pelas condições $|z-3-i| = 2$, $|z-3-i| \leq 2$ e $|z-3-i| > 2$.

Comecemos por escrever as condições na forma
$|z-(3+i)| = 2$, $|z-(3+i)| \leq 2$ e $|z-(3+i)| > 2$ para concluir que o afixo de $3+i$ é o centro da circunferência envolvida nas três regiões.

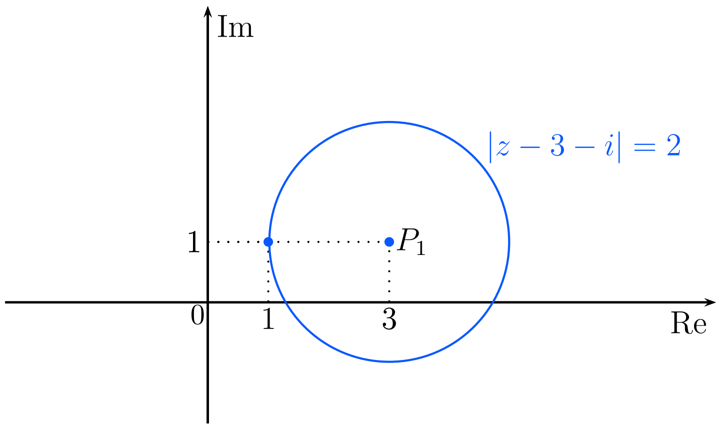


Figura 8.21: Representação no plano de Argand da condição $|z-(3+i)| = 2$

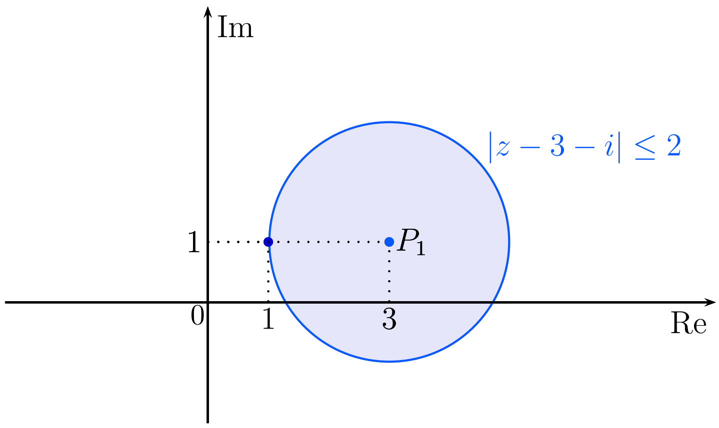


Figura 8.22: Representação no plano de Argand da condição $|z-(3+i)| \leq 2$

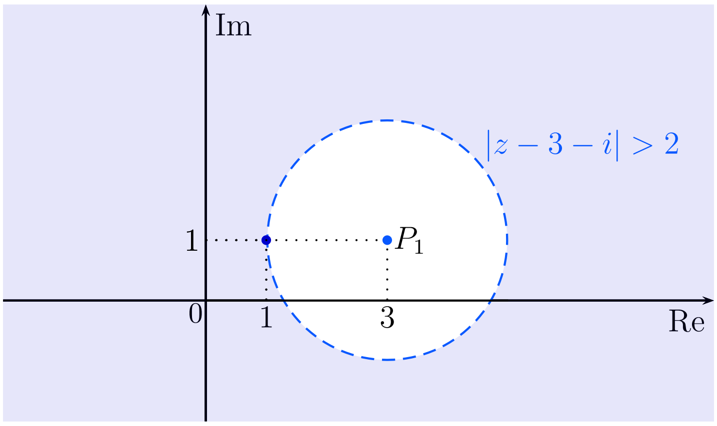


Figura 8.23: Representação no plano de Argand da condição $|z-(3+i)|>2$

8.6.3 Mediatriz de um segmento de reta

Recordemos que no plano, a mediatriz de um segmento de reta $[AB]$ é o lugar geométrico dos pontos equidistantes de A e de B. Graficamente, é uma reta perpendicular a $[AB]$ e que contém o seu ponto médio. No que se segue, apresentamos condições que envolvem a mediatriz de um segmento de reta no plano complexo.

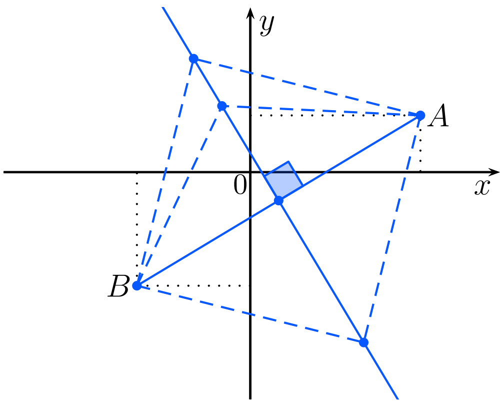


Figura 8.24: Mediatriz de um segmento de reta.

Proposição 8.28 — Mediatriz de um segmento de reta
Consideremos os números complexos z_1 e z_2 e os seus afixos P_1 e P_2, respetivamente. Os afixos dos números complexos que satisfazem a condição: