

Exame Final Nacional de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

Prova 835 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2022

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 27-B/2022, de 23 de março

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

15 Páginas

A prova inclui 9 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 5 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente, consoante a situação, todos os elementos relevantes visualizados na sua utilização, como:

- os gráficos obtidos, com os pontos relevantes assinalados (por exemplo, pontos de intersecção de gráficos, pontos de máximos e pontos de mínimos);
- as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Formulário

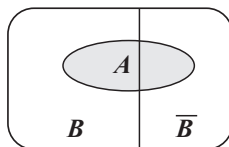
Modelos de grafos

Condição necessária e suficiente para que um grafo conexo admita circuitos de Euler

Um grafo conexo admite circuitos de Euler se e só se todos os seus vértices forem de grau par.

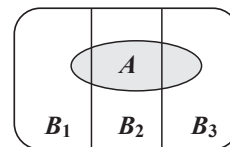
Modelos de probabilidade

Teorema da probabilidade total e regra de Bayes



$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = \\ &= P(B) \times P(A | B) + P(\bar{B}) \times P(A | \bar{B}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B | A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \\ &= \frac{P(B) \times P(A | B)}{P(B) \times P(A | B) + P(\bar{B}) \times P(A | \bar{B})} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) = \\ &= P(B_1) \times P(A | B_1) + P(B_2) \times P(A | B_2) + P(B_3) \times P(A | B_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B_k | A) &= \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} = \\ &= \frac{P(B_k) \times P(A | B_k)}{P(B_1) \times P(A | B_1) + P(B_2) \times P(A | B_2) + P(B_3) \times P(A | B_3)} \end{aligned}$$

podendo k tomar os valores 1, 2 ou 3

Modelo normal

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$$

Intervalos de confiança

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável aleatória normal X , admitindo que se conhece o desvio padrão da variável

$$\left] \bar{x} - z \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right[$$

n – dimensão da amostra

\bar{x} – média amostral

σ – desvio padrão da variável

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável aleatória X , admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left] \bar{x} - z \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z \frac{s}{\sqrt{n}} \right[$$

n – dimensão da amostra

\bar{x} – média amostral

s – desvio padrão amostral

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para uma proporção p , admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left] \hat{p} - z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right[$$

n – dimensão da amostra

\hat{p} – proporção amostral

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

(*) Valores de z para os níveis de confiança mais usuais

| Nível de confiança | 90% | 95% | 99% |
|--------------------|-------|-------|-------|
| z | 1,645 | 1,960 | 2,576 |

1. Na ilha de Dujal, existe um parque de campismo que é muito procurado por campistas.

Para eleger o novo diretor do parque, os 30 principais acionistas da empresa que o detém votaram, cada um deles, numa lista de preferências constituída pelos três candidatos elegíveis para o cargo: a Ana (A), o Bruno (B) e o Carlos (C).

A Figura 1 apresenta os resultados dos 30 votos validamente expressos.

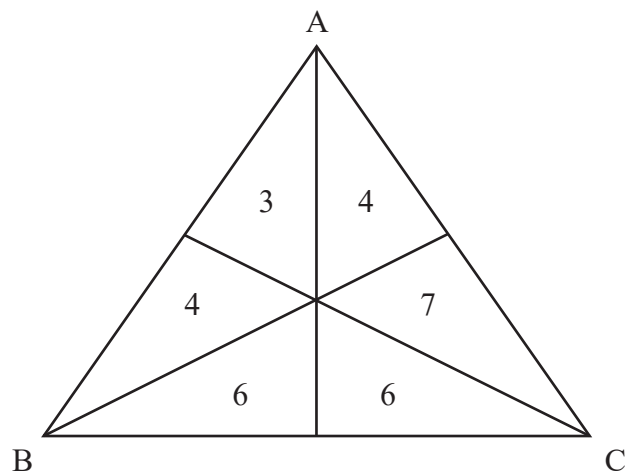


Figura 1

De acordo com a Figura 1, três dos acionistas votaram na lista de preferência ABC, pois o número 3 está numa região do triângulo cujo vértice mais próximo é o A, seguindo-se o B e, finalmente, o C.

- 1.1. Concluída a votação, os resultados foram registados numa tabela semelhante à Tabela 1, que se apresenta parcialmente preenchida, para posterior eleição do novo diretor do parque de campismo.

Tabela 1

| Preferência \ Votos | Votos | | | | | |
|---------------------|-------|---|---|---|---|---|
| | 3 | 4 | 4 | 6 | 6 | 7 |
| 1. ^a | A | | | | | C |
| 2. ^a | B | | | | | A |
| 3. ^a | C | | | | | B |

A eleição do novo diretor do parque de campismo resultou da aplicação do método a seguir descrito.

- Seleciona-se um par de candidatos e atribui-se o número de votos registados em cada coluna ao candidato mais bem posicionado, de entre os dois selecionados.
- Comparam-se os votos obtidos por esses dois candidatos. O candidato com o maior número de votos é o vencedor do par escolhido.
- Repetem-se os procedimentos anteriores até um dos candidatos ter vencido todas as comparações com os restantes. Esse candidato será o vencedor da eleição e, portanto, o novo diretor do parque de campismo.

Determine qual dos candidatos foi eleito como novo diretor do parque de campismo por aplicação do método descrito, começando por comparar as votações dos candidatos A e C.

Na sua resposta, apresente:

- uma tabela semelhante à Tabela 1, devidamente preenchida;
- todos os cálculos que efetuar.

- * 1.2. Escolhe-se, ao acaso, um dos 30 votos apresentados na Figura 1.

Considere os acontecimentos seguintes, associados a esta experiência aleatória:

R : «O voto selecionado tem como primeira preferência o candidato B»

S : «O voto selecionado tem como segunda preferência o candidato A»

Qual é o valor da probabilidade condicionada $P(R|S)$?

- (A) $\frac{4}{11}$
- (B) $\frac{7}{11}$
- (C) $\frac{4}{9}$
- (D) $\frac{7}{9}$

* 2. A Lara, o Manuel, a Paula, o Vasco e o Tomás são os responsáveis pela inspeção diária do recinto do parque de campismo. Para rentabilizar o seu trabalho, decidem dividir o recinto em cinco parcelas, ficando cada um responsável pela inspeção de uma parcela. De modo a realizar uma divisão do trabalho que cada um considerasse justa, aplicaram o algoritmo a seguir descrito.

1.º passo: Atribui-se, aleatoriamente, uma ordem aos responsáveis. Considere-se que a ordem atribuída foi A, B, C, D e E.

2.º passo: O responsável A delimita uma parcela do mapa do recinto que considera corresponder a $\frac{1}{5}$ do total, visto serem cinco os intervenientes iniciais, e entrega a parcela em causa ao responsável B.

3.º passo: O responsável B pronuncia-se, concordando com a divisão efetuada ou dela discordando:

- se considera que a parcela que lhe foi entregue é $\frac{1}{5}$ do mapa (ou menos), passa a vez ao responsável seguinte, entregando-lhe a parcela em causa;
- se considera que a parcela que lhe foi entregue é mais do que $\frac{1}{5}$ do mapa, retifica-a (retirando-lhe uma parte) e passa a vez ao responsável seguinte, entregando-lhe a parcela em causa.

4.º passo: O responsável C repete o procedimento do 3.º passo e entrega a parcela em causa ao responsável D.

5.º passo: O responsável D repete o procedimento do 3.º passo e entrega a parcela em causa ao responsável E.

6.º passo: O responsável E pronuncia-se:

- se concorda com a divisão efetuada, atribui a parcela resultante de todo este processo ao último responsável que tenha retificado a parcela ou, caso ninguém a tenha retificado, entrega-a ao responsável A;
- se discorda da divisão efetuada, retifica a parcela, e esta é-lhe entregue; termina assim a primeira volta, saindo o responsável que acabou de receber a parcela.

7.º passo: A segunda volta faz-se com o que resta do mapa e inicia-se no responsável a seguir ao que acabou de receber a parcela na volta anterior, mantendo-se a ordem entre os restantes responsáveis.

8.º passo: Realizam-se as voltas necessárias, sempre com um responsável a menos do que na volta anterior, até que restem apenas dois responsáveis. Quando isso acontecer, um divide e o outro escolhe. Termina, assim, a divisão do mapa do recinto pelos cinco responsáveis.

Para a divisão do mapa, a ordem atribuída aleatoriamente foi: Manuel, Tomás, Lara, Vasco e Paula.

Admita que:

- a segunda volta se iniciou com a Lara;
- na segunda volta, a parcela foi atribuída ao Vasco;
- na terceira volta, houve retificações por parte de dois responsáveis.

Associe a cada um dos nomes apresentados na Coluna I as afirmações da Coluna II que lhe correspondem por aplicação do algoritmo.

Cada uma das afirmações, de 1 a 7, deve ser associada apenas a um dos nomes e todas as afirmações devem ser utilizadas.

Escreva na folha de respostas cada nome da Coluna I seguido do(s) número(s) correspondente(s) da Coluna II.

| COLUNA I | COLUNA II |
|------------------------|---|
| Lara Paula Tomás | <p>(1) Na primeira volta, foi-lhe atribuída uma parcela do mapa do recinto.</p> <p>(2) Na segunda volta, foi o responsável a pronunciar-se após a parcela ter sido retificada.</p> <p>(3) Inicia a terceira volta.</p> <p>(4) Na terceira volta, foi-lhe atribuída uma parcela do mapa do recinto.</p> <p>(5) Na terceira volta, retificou a parcela.</p> <p>(6) Nunca retificou qualquer parcela.</p> <p>(7) Nunca iniciou qualquer volta.</p> |

3. No parque de campismo de Dujal, existem cinco ecopontos: A, B, C, D e E.

No final de cada dia, um funcionário recolhe o conteúdo dos ecopontos. De modo a tornar mais eficiente o seu trabalho, o funcionário definiu um itinerário, com início e fim no portão do parque (P), para a recolha do conteúdo dos cinco ecopontos.

O itinerário definido resultou de um grafo construído com o algoritmo seguinte:

- escolher a aresta do grafo com menor peso, qualquer que ela seja;
- escolher, sucessivamente, as arestas com menor peso, garantindo que três arestas do grafo que está a ser definido não se encontram num mesmo vértice e não permitindo que se formem quaisquer percursos fechados que não incluam todos os vértices.

As distâncias mínimas, em metros, entre cada dois ecopontos e entre o portão e cada um dos cinco ecopontos estão registadas na Tabela 2.

Tabela 2

| | B | C | D | E | P |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|
| A | 310 | 730 | 365 | 600 | 395 |
| B | | 550 | 400 | 790 | 710 |
| C | | | 800 | 610 | 366 |
| D | | | | 605 | 615 |
| E | | | | | 380 |

Apresente um possível itinerário, definido pelo funcionário, com início e fim no portão.

Na sua resposta, apresente:

- a ordenação das arestas seleccionadas pelo algoritmo descrito;
- um grafo semelhante ao que terá sido construído pelo funcionário.

- * 4. Na Figura 2, está reproduzida parte da tabela de taxas diárias praticadas no parque de campismo da ilha de Dujal, no mês de junho.

| | Bungalow M (até 4 pessoas) | Bungalow G (até 6 pessoas) | Tenda |
|--------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|--------------|
| Taxa diária | 80 € | 100 € | 6,50 €* |

* a este preço acresce o valor de 5,50 € por adulto alojado.

Figura 2

Durante o mês de junho, uma empresa organizou um evento para 140 pessoas, reservando 8 *bungalows* M, 10 *bungalows* G e 12 tendas para um dia.

Admita que todos os *bungalows* foram usados na sua capacidade máxima e que, do valor faturado, o parque obteve um lucro de 25%.

Qual é o valor exato do lucro, em euros, que o parque de campismo obteve com este evento?

5. Uma das principais atrações do parque de campismo da ilha de Dujal é o seu lago natural, onde existem diversas espécies de peixes.

Admita que o número de peixes da espécie A existentes no lago, em centenas, t anos após o início do ano 2000, é bem aproximado pelo modelo

$$A(t) = \frac{20}{1 + 99e^{-0,8t}}$$



Assim, por exemplo, como $A(10) \approx 19,35713$ centenas, o número aproximado de peixes da espécie A existentes no lago, dez anos após o início do ano 2000, é 1936.

- * 5.1. Qual foi o aumento, em percentagem, do número de peixes da espécie A no lago, comparando o número de peixes existentes três anos após o início do ano 2000 com o número existente seis anos após o início do ano 2000?

Apresente o resultado com arredondamento às unidades.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve cinco casas decimais.

- 5.2. Num determinado momento, o número de peixes da espécie A foi, pela primeira vez, seis vezes maior do que o número de peixes existentes no início do ano 2002.

Determine em que ano tal ocorreu.

Para responder a esta questão, recorra às capacidades gráficas da sua calculadora e apresente:

- o(s) gráfico(s) visualizado(s);
- a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) relevante(s) arredondada(s) às décimas.

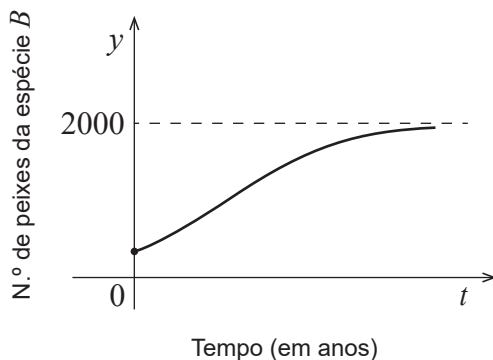
Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve cinco casas decimais.

* 5.3. A evolução do número de peixes da espécie B no lago do parque de campismo, desde o início do ano 1997, pode ser modelada através de uma função.

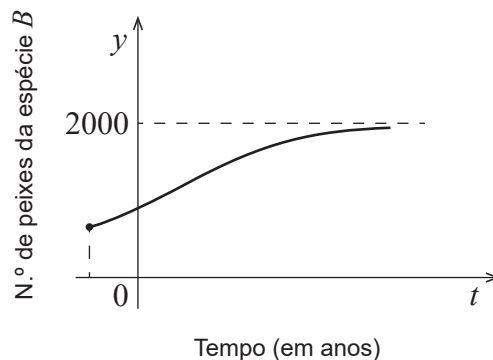
Com o tempo, estima-se que o número de peixes da espécie B no lago venha a atingir o dobro do número de peixes da espécie A .

Em qual das opções seguintes pode estar representado o gráfico dessa função, desde o início do ano 1997, considerando que $t = 0$ corresponde ao início do ano 2000?

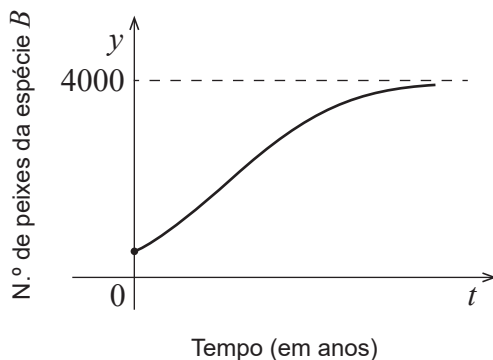
(A)



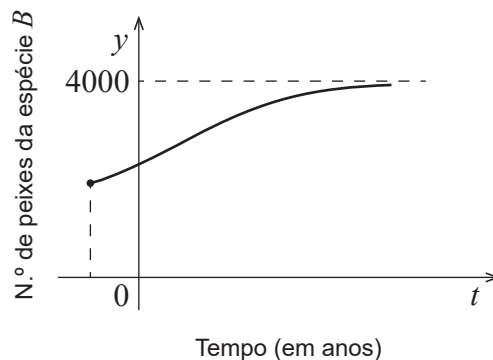
(B)



(C)



(D)



6. No parque de campismo de Dujal, existem 380 lugares distribuídos do seguinte modo:

- lugares para tendas;
- lugares para estacionar autocaravanas;
- lugares para estacionar automóveis.

Ao longo de uma determinada semana, verificou-se que estiveram sempre ocupados os mesmos 200 lugares.

Na Figura 3, é apresentada a distribuição dos lugares ocupados, tendo em conta a sua função.

Na Tabela 3, apresenta-se o número de lugares no parque de campismo, tendo em conta a sua função e o número de lugares ocupados por autocaravanas.

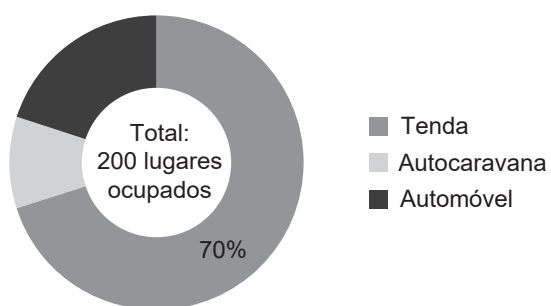


Figura 3

Tabela 3

| | N.º de lugares | N.º de lugares ocupados |
|--------------|----------------|-------------------------|
| Tenda | 175 | |
| Autocaravana | 80 | 20 |
| Automóvel | 125 | |

Determine a percentagem de lugares ocupados por automóveis, relativamente ao número de lugares existentes para os estacionar.

7. Um grupo de catorze pessoas, o grupo A, cuja média de idades é 20 anos, realizou uma festa no parque de campismo de Dujal.

* 7.1. Admita que a amplitude da distribuição das idades das pessoas do grupo A é 19 anos.

Em cada uma das opções seguintes, é apresentado um diagrama de caule e folhas. Nos diagramas, o algarismo das dezenas de cada registo é indicado no caule, e o algarismo das unidades é indicado nas folhas.

Qual dos diagramas seguintes pode representar as idades daquele grupo de pessoas?

(A)

| | | |
|---|--|---------------------|
| 1 | | 8, 8, 8, 8, 9, 9 |
| 2 | | 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 |
| 3 | | 0 |

(B)

| | | |
|---|--|---------------------|
| 1 | | 2, 2, 3, 3, 5, 5, 5 |
| 2 | | 0, 1, 2 |
| 3 | | 0, 0, 1, 1 |

(C)

| | | |
|---|--|------------------------------|
| 1 | | 4, 6 |
| 2 | | 0, 2 |
| 3 | | 1, 2, 2, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 9 |

(D)

| | | |
|---|--|------------------------------|
| 1 | | 2, 2, 2, 3, 3, 5, 5, 7, 8, 9 |
| 2 | | 1, 1, 2 |
| 3 | | 1 |

* 7.2. Ao grupo A, constituído por 14 pessoas, juntou-se um outro grupo de pessoas, o grupo B, cuja média de idades é 18 anos.

Admita que a média das idades da totalidade das pessoas dos dois grupos é 18,7 anos.

Determine por quantas pessoas é constituído o grupo B.

8. O parque de campismo dispõe de diversas comodidades para os seus clientes, sendo duas delas um bar e uma piscina.

* 8.1. Questionou-se um conjunto de 300 clientes que usufruíram de, pelo menos, uma das duas comodidades referidas e verificou-se que:

- 80 clientes tinham usufruído de ambas as comodidades;
- dos clientes que usufruíram do bar, a terça parte também usufruiu da piscina.

Quantos, do conjunto de 300 clientes, usufruíram da piscina?

8.2. Numa determinada altura do ano, verificou-se que:

- 60% dos clientes eram estrangeiros;
- 30% dos clientes eram estrangeiros e não usufruíram da piscina;
- dos clientes que não eram estrangeiros, 80% não usufruíram da piscina.

Escolheu-se, ao acaso, um destes clientes.

Determine a probabilidade de esse cliente ter usufruído da piscina.

Apresente o resultado na forma de dízima.

* 9. No parque de campismo da ilha de Dujal, foi feito um estudo para estimar a idade média dos campistas, em anos, que aí acamparam nos últimos doze meses.

Para esse estudo, recorreu-se a uma amostra aleatória, de dimensão superior a 30 campistas, e construiu-se um intervalo a 90% de confiança para a idade média dos campistas.

Admita que a amplitude desse intervalo de confiança era 0,3619 e que o desvio padrão amostral era, aproximadamente, igual a 5,5 anos.

Qual terá sido a dimensão dessa amostra?

FIM

COTAÇÕES

| | | | | | | | | | | |
|--|---------------|-----------|-------------|-------------|-------------|-----------------|-------------|-------------|-----------|-----------------|
| As pontuações obtidas nas respostas a estes 9 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final. | 1.2. | 2. | 4. | 5.1. | 5.3. | 7.1. | 7.2. | 8.1. | 9. | Subtotal |
| Cotação (em pontos) | 12 | 20 | 18 | 18 | 12 | 12 | 18 | 18 | 18 | 146 |
| Destes 5 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação. | 1.1. | 3. | 5.2. | 6. | 8.2. | Subtotal | | | | |
| Cotação (em pontos) | 3 x 18 pontos | | | | | 54 | | | | |
| TOTAL | | | | | | | | | | 200 |

Prova 835

2.^a Fase