REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

Prova 835 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2020

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 12 Páginas

A prova inclui 3 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final (itens **1.2.**, **3.** e **7.1.**). Dos restantes 11 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente, consoante a situação, todos os elementos relevantes visualizados na sua utilização, como:

- os gráficos obtidos, com os pontos relevantes assinalados (por exemplo, pontos de intersecção de gráficos, pontos de máximos e pontos de mínimos);
- as linhas relevantes da tabela obtida para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Formulário

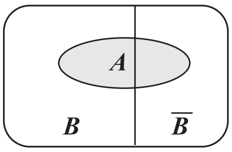
Modelos de grafos

Condição necessária e suficiente para que um grafo conexo admita circuitos de Euler

Um grafo conexo admite circuitos de Euler se e só se todos os seus vértices forem de grau par.

Modelos de probabilidade

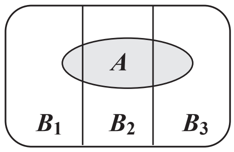
Teorema da probabilidade total e regra de Bayes



$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) =$$
$$= P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B) \times P(A \mid B)}{P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})}$$



$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) =$$
$$= P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)$$

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B_k) \times P(A \mid B_k)}{P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)}$$

podendo k tomar os valores $1, 2$ ou 3

Modelo normal

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$$
$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$$
$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$$

Intervalos de confiança

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável aleatória normal X, admitindo que se conhece o desvio padrão da variável

$$\left]\overline{x} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\overline{x}$ – média amostral

σ – desvio padrão da variável

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável aleatória X, admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left]\overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\overline{x}$ – média amostral

s – desvio padrão amostral

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para uma proporção p, admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left]\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \ \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\hat{p}$ – proporção amostral

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

(*) Valores de z para os níveis de confiança mais usuais

Nível de confiança	90%	95%	99%
z	$1{,}645$	$1{,}960$	$2{,}576$

1. O Filipe e nove dos seus amigos decidiram ir juntos a um festival de música.

Como tinham interesse nos festivais A, B e C, decidiram proceder a uma votação para selecionar um deles.

Cada um dos amigos preencheu um boletim de voto, no qual estava representado um triângulo equilátero, de vértices A, B e C, dividido em seis regiões. Para votar, cada uma das dez pessoas registou uma marca (×) numa das seis regiões, de acordo com as suas preferências.

Na Figura 1, apresenta-se um exemplo de boletim de voto preenchido.

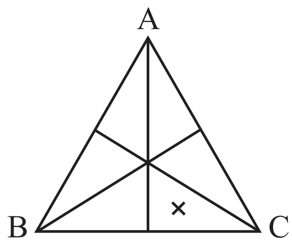


Figura 1

O exemplo apresentado corresponde ao voto na lista com a ordem de preferências CBA, pois a marca (×) foi colocada numa região onde o vértice C é o mais próximo, seguindo-se o B e, finalmente, o A.

1.1. Considere os seis boletins de voto apresentados na Figura 2.

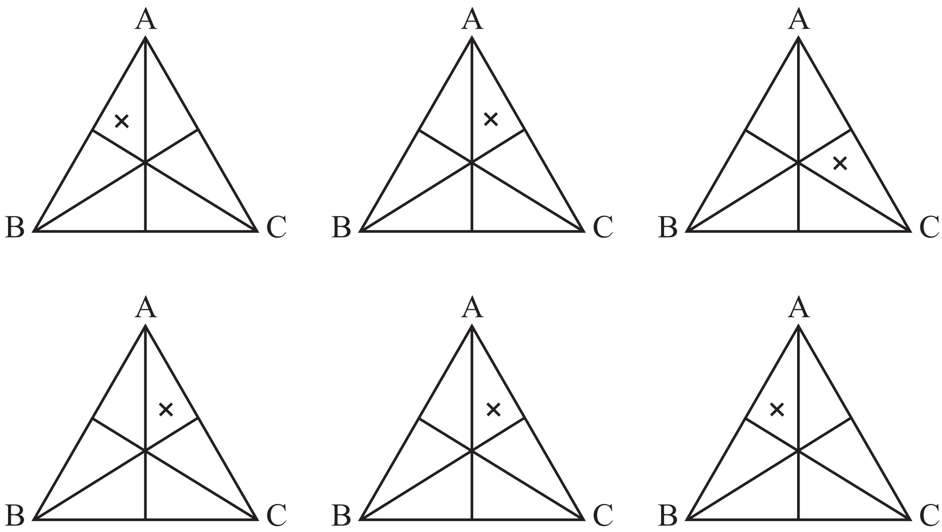


Figura 2

Escolhe-se, ao acaso, um destes seis boletins e a lista de preferências nele registada.

Considere os seguintes acontecimentos, associados a esta experiência aleatória:

Q: «O boletim escolhido corresponde a uma lista em que o festival A ocupa a primeira preferência»

R: «O boletim escolhido corresponde a uma lista em que o festival B ocupa a última preferência»

Qual é o valor da probabilidade condicionada $P(\mathrm{Q} \mid \mathrm{R})$?

(A) $\frac{1}{2}$ **(B)** $\frac{3}{5}$ **(C)** $\frac{3}{4}$ **(D)** $\frac{5}{6}$

1.2. Concluída a votação, foi aplicado o método a seguir descrito para obter a decisão final.

- São atribuídos pontos a cada um dos festivais em função do seu lugar na ordem da lista de preferências.
  Cada festival recebe:
  - cinco pontos por cada voto na primeira preferência;
  - três pontos por cada voto na segunda preferência;
  - um ponto por cada voto na terceira preferência.
- Contabiliza-se a pontuação total de cada um dos festivais e o mais pontuado será o escolhido.
- Em caso de empate, o festival será escolhido por sorteio.

A Tabela 1 apresenta as preferências resultantes da votação, sem contemplar o voto do Filipe.

Tabela 1

Preferências \ **Votos**	**2**	**2**	**2**	**3**
1.ª	A	A	C	B
2.ª	B	C	B	C
3.ª	C	B	A	A

Admita que, depois de contabilizado o voto do Filipe, o festival B ficou em primeiro lugar e o C em último, não tendo havido qualquer empate.

Apresente a lista de preferências registada no boletim de voto do Filipe.

Na sua resposta, apresente a pontuação de cada festival, resultante da aplicação do método acima descrito:

- antes de ser contabilizado o voto do Filipe;
- depois de ser contabilizado o voto do Filipe.

2. Dois irmãos, a Elsa e o Manuel, receberam de presente seis bilhetes, B1, B2, B3, B4, B5 e B6, para seis festivais diferentes.

A Elsa valoriza três vezes mais o bilhete B2 do que qualquer um dos outros bilhetes, sendo todos os outros bilhetes valorizados da mesma forma.

Qual das seguintes opções pode representar um conjunto de bilhetes que a Elsa valoriza em 50% do valor global dos bilhetes?

(A) B1; B4; B6 **(B)** B2; B3; B5 **(C)** B1; B3; B5; B6 **(D)** B2; B3; B4; B5

3. Dois amigos, a Elsa e o Gaspar, partilharam um fogão de campismo (F), uma mesa de campismo (M) e uma tenda (T) durante alguns anos; porém, sendo cada vez mais difícil conciliar a partilha dos bens, decidiram distribuí-los entre os dois.

Como não chegaram a acordo sobre a divisão dos três bens, os amigos resolveram aplicar o método a seguir descrito.

- Cada um dos amigos atribui, secretamente, um certo número de pontos a cada um dos bens, num total de 100 pontos.
- Cada bem é destinado, temporariamente, ao amigo que mais o valoriza.
- Determina-se o total de pontos do(s) bem(ns) temporariamente destinado(s) a cada um dos amigos. Seja A o amigo com o total de pontos mais elevado e seja B o outro amigo.
- Procede-se ao ajuste da partilha, de modo que os dois amigos fiquem com número igual no total de pontos, através da partilha de um dos bens. Os outros bens ficam definitivamente atribuídos a cada um dos amigos.
  - Representa-se o total final de pontos a atribuir ao amigo A pela diferença entre o total temporário dos seus pontos e x por cento dos pontos por ele atribuídos ao bem a partilhar.
  - Representa-se o total final de pontos a atribuir ao amigo B pela soma do total temporário dos seus pontos com x por cento dos pontos por ele atribuídos ao bem a partilhar.
  - Igualam-se os dois totais finais, de modo a determinar o valor de x com o qual a partilha ficará equilibrada.
- O amigo B fica com o(s) bem(ns) a si destinado(s) e x por cento da utilização do bem a partilhar, e o amigo A fica com o restante.

Na Tabela 2, apresenta-se o número de pontos atribuídos aos três bens por cada um dos amigos.

Tabela 2

	F	M	T
Elsa	19	26	55
Gaspar	35	5	60

Atendendo aos dados apresentados na Tabela 2, os amigos concluíram que o bem a partilhar seria a tenda.

Assim, após a aplicação do método descrito, determinaram o número de dias em que, num ano, cada um deles poderia utilizar a tenda.

Admita que, até agosto, num ano com 365 dias, o Gaspar já tinha utilizado a tenda durante 146 dias.

Será que ainda a poderá utilizar durante os cinco dias do festival de verão a que pretende ir?

Na sua resposta:

– apresente a partilha temporária dos bens pelos dois amigos;

– determine o total de pontos dos bens temporariamente destinados a cada amigo;

– apresente a equação que traduz o equilíbrio da partilha e resolva-a;

– apresente a partilha final dos bens pelos dois amigos;

– determine o número de dias em que o Gaspar pode utilizar a tenda.

4. Num determinado verão, decorreram os festivais F1, F2, F3, F4, F5 e F6. Estes festivais realizaram-se ao fim de semana e tiveram, cada um, a duração de dois dias (sábado e domingo).

Na Tabela 3, apresentam-se os festivais a que quatro jovens assistiram. Cada jovem assistiu, sempre, a ambos os dias de cada um dos festivais.

Tabela 3

Jovens	**Festivais**
Elsa	F1, F2, F3
Filipe	F1, F2, F4
Gaspar	F1, F3, F5
Manuel	F4, F5, F6

Indique o número mínimo de fins de semana em que os festivais podem ter decorrido.

Na sua resposta:

– apresente um grafo que modele a situação descrita;

– identifique os festivais que decorreram em simultâneo.

5. Para pagar as despesas da sua ida a um festival, o Filipe utilizou uma poupança no valor de 240 euros, feita ao longo de 16 meses.

Após um depósito inicial, o Filipe depositou mensalmente uma quantia fixa, que corresponde a uma percentagem do valor depositado inicialmente.

Determine a que percentagem do depósito inicial corresponde a quantia fixa depositada em cada mês, sabendo que o valor final da poupança foi o dobro do depósito inicial.

6. Um balão publicitário foi lançado de uma plataforma.

Admita que, t minutos após ser lançado, a altura do balão, em metros, é bem aproximada pelo modelo seguinte.

$$A(t) = \frac{30}{1 + 29e^{-2t}} \qquad \text{para } t \in [0, 5]$$

6.1. Determine quantos metros subiu o balão no primeiro minuto.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve duas casas decimais.

6.2. Quando o balão subiu dos 12 até aos 20 metros de altura, foram lançados confetes.

Determine durante quantos segundos decorreu o lançamento dos confetes.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Para responder a esta questão, recorra às capacidades gráficas da sua calculadora e apresente:

– o(s) gráfico(s) visualizado(s);

– as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) com arredondamento às centésimas.

7. A venda de bilhetes para o concerto da banda *BigBand* gerou tanta procura que, na véspera do primeiro dia de venda, se formou fila para a aquisição de bilhetes à porta da bilheteira.

Ao longo do primeiro dia de venda dos bilhetes, as pessoas foram questionadas sobre o número de horas que permaneceram na fila antes da abertura da bilheteira (x) e sobre o tempo, em horas, que decorreu desde a abertura da bilheteira até terem adquirido os bilhetes (y).

A Tabela 4 apresenta as respostas dadas por sete das pessoas questionadas: A, B, C, D, E, F e G.

Tabela 4

Pessoa	x **(horas)**	y **(horas)**
A	30	0,5
B	24	1
C	22,5	2
D	18	4
E	12	8
F	8	9
G	3	12

7.1. O Filipe e um amigo chegaram e permaneceram juntos na fila para a aquisição de bilhetes.

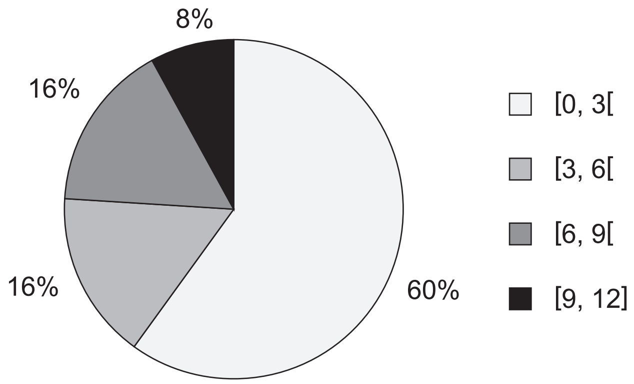
O tempo médio de espera das nove pessoas, as sete referidas na Tabela 4 e os dois amigos, até à abertura da bilheteira foi 15,5 horas.

Determine quantas horas o Filipe esperou na fila até à abertura da bilheteira.

7.2. No final do primeiro dia de venda dos bilhetes, foi registado o tempo de espera de cada cliente, em horas, decorrido desde a abertura da bilheteira até ter adquirido os bilhetes, incluindo as pessoas mencionadas na Tabela 4.

A informação recolhida foi organizada num gráfico circular semelhante ao Gráfico 1.

Gráfico 1



Admita que, das pessoas indicadas na Tabela 4, as que esperaram menos de três horas correspondem a 0,4% do número total de pessoas que adquiriram bilhetes nesse intervalo de tempo.

O número total de clientes que, nesse dia, adquiriram bilhete foi:

(A) 1250 **(B)** 5 **(C)** 750 **(D)** 50

7.3. Admita que a relação entre as variáveis x e y, da Tabela 4, é bem aproximada por uma regressão linear, na forma $y = ax + b$.

Determine qual poderá ter sido o tempo que decorreu desde a abertura da bilheteira até à aquisição dos bilhetes por parte de uma pessoa que tenha estado seis horas na fila antes da abertura da bilheteira.

Apresente o resultado em horas, arredondado às unidades.

Na sua resposta, apresente a equação da reta de regressão, com os valores de a e de b arredondados com três casas decimais.

8. Foi realizado um estudo estatístico junto do público de um festival.

8.1. Nesse festival, todos os dias, após o último concerto, há um espetáculo de fogo de artifício.

No último dia do festival, verificou-se que:

- 60% do público assistiu ao primeiro concerto do dia;
- 48% do público assistiu ao primeiro concerto do dia e viu o fogo de artifício;
- do público que não assistiu ao primeiro concerto do dia, 30% não viu o fogo de artifício.

Escolheu-se ao acaso uma pessoa que foi ao último dia do festival.

Determine a probabilidade de essa pessoa não ter visto o fogo de artifício.

8.2. Os dados recolhidos permitem concluir que o consumo de bebidas das 60 000 pessoas presentes durante os vários dias desse festival segue uma distribuição aproximadamente normal, de valor médio 1,5 litros e desvio padrão 0,4 litros.

Quantas pessoas será de esperar que, durante o festival, tenham consumido no máximo 0,3 litros de bebida?

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve cinco casas decimais.

9. A organização de um festival disponibiliza quatro zonas para acampar, Z1, Z2, Z3 e Z4. Com o intuito de saber qual a zona mais pretendida, a organização levou a cabo um inquérito a algumas pessoas, selecionadas ao acaso.

Na Tabela 5, está registado o número de pessoas que manifestaram intenção de acampar em cada uma das zonas.

Tabela 5

Zona	Z1	Z2	Z3	Z4
N.º de pessoas	125	250	150	100

A amplitude de um intervalo de confiança para a proporção de pessoas que têm intenção de acampar na zona Z1, face ao número total de pessoas que têm intenção de acampar, é 0,05264.

Determine o nível de confiança desse intervalo.

Na sua resposta, apresente o valor da proporção amostral.

FIM

COTAÇÕES

<table>
<tr><td>As pontuações obtidas nas respostas a estes 3 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.</td><td colspan="4">1.2.</td><td colspan="4">3.</td><td colspan="3">7.1.</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td colspan="4">20</td><td colspan="4">18</td><td colspan="3">18</td><td>56</td></tr>
<tr><td>Destes 11 itens, contribuem para a classificação final da prova os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.</td><td>1.1.</td><td>2.</td><td>4.</td><td>5.</td><td>6.1.</td><td>6.2.</td><td>7.2.</td><td>7.3.</td><td>8.1.</td><td>8.2.</td><td>9.</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td colspan="11">8 x 18 pontos</td><td>144</td></tr>
<tr><td colspan="12">TOTAL</td><td>200</td></tr>
</table>

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

Prova 835

1.ª Fase