

Exame Final Nacional de Matemática Aplicada às Ciências Sociais
Prova 835 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2018

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

15 Páginas

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Na resposta a cada um dos itens de escolha múltipla, selecione a única opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente, consoante a situação, todos os elementos relevantes visualizados na sua utilização, como:

- os gráficos obtidos, com os pontos relevantes assinalados (por exemplo, pontos de intersecção de gráficos, pontos de máximos e pontos de mínimos);
 - as linhas relevantes da tabela obtida para a resolução;
 - as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).
-

Nos termos da lei em vigor, as provas de avaliação externa são obras protegidas pelo Código do Direito de Autor e dos Direitos Conexos. A sua divulgação não suprime os direitos previstos na lei. Assim, é proibida a utilização destas provas, além do determinado na lei ou do permitido pelo IAVE, I.P., sendo expressamente vedada a sua exploração comercial.

Formulário

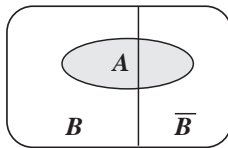
Modelos de grafos

Condição necessária e suficiente para que um grafo conexo admita circuitos de Euler

Um grafo conexo admite circuitos de Euler se e só se todos os seus vértices forem de grau par.

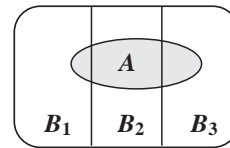
Modelos de probabilidade

Teorema da probabilidade total e regra de Bayes



$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = \\ &= P(B) \times P(A | B) + P(\bar{B}) \times P(A | \bar{B}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B | A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \\ &= \frac{P(B) \times P(A | B)}{P(B) \times P(A | B) + P(\bar{B}) \times P(A | \bar{B})} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) = \\ &= P(B_1) \times P(A | B_1) + P(B_2) \times P(A | B_2) + P(B_3) \times P(A | B_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B_k | A) &= \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} = \\ &= \frac{P(B_k) \times P(A | B_k)}{P(B_1) \times P(A | B_1) + P(B_2) \times P(A | B_2) + P(B_3) \times P(A | B_3)} \end{aligned}$$

podendo k tomar os valores 1, 2 ou 3

Modelo normal

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$$

Introdução à inferência estatística

Teorema do limite central para a distribuição de amostragem de uma média

Recolhendo uma amostra de dimensão n ($n \geq 30$) de uma população X com valor médio μ e desvio padrão σ , a distribuição de amostragem da média dessa amostra, \bar{X} , pode ser aproximada por uma distribuição normal com valor médio μ e desvio padrão $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Intervalos de confiança

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável normal X , admitindo que se conhece o desvio padrão da variável

$$\left] \bar{x} - z \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right[$$

n – dimensão da amostra

\bar{x} – média amostral

σ – desvio padrão da variável

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável X , admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left] \bar{x} - z \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z \frac{s}{\sqrt{n}} \right[$$

n – dimensão da amostra

\bar{x} – média amostral

s – desvio padrão amostral

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para uma proporção p , admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left] \hat{p} - z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right[$$

n – dimensão da amostra

\hat{p} – proporção amostral

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

(*) Valores de z para os níveis de confiança mais usuais

Nível de confiança	90%	95%	99%
z	1,645	1,960	2,576

1. A companhia de teatro «Perto de Si» está a organizar uma digressão a nível nacional, levando à cena uma peça.

As três primeiras cidades onde será apresentada a peça são A, B e C.

1.1. O diretor da companhia propôs, aos 75 elementos que dela fazem parte, a votação para a escolha da cidade onde se vai iniciar a digressão.

Apurados os votos, verificou-se que o nível de abstenção foi de 20% e que a percentagem de votos validamente expressos foi de 95%.

A Tabela 1 está incompleta, apresentando apenas o número de votos, validamente expressos, obtidos por duas das cidades.

Tabela 1

Cidade	A	B	C
N.º de votos	14	17	

Quantos votos validamente expressos foram obtidos pela cidade C?

(A) 26

(B) 29

(C) 40

(D) 44

1.2. O diretor da companhia de teatro decidiu apresentar um total de 7 sessões da peça, no conjunto das três cidades, A, B e C.

Para a distribuição das sessões pelas cidades, foi considerado o número de habitantes de cada uma delas e aplicou-se o método que a seguir se descreve.

- Divide-se o número de habitantes de cada cidade, sucessivamente, por 1, 3, 5, 7, 9, etc.
- Ordenam-se todos os quocientes obtidos, arredondados às unidades, pela ordem decrescente da sua grandeza, numa série de tantos termos quantas as sessões previstas.
- Atribuem-se as sessões às cidades a que correspondem os termos da série estabelecida pela regra anterior, recebendo cada uma das cidades tantas sessões quantos os seus termos na série.
- No caso de ficar somente uma sessão por atribuir e de os termos seguintes da série serem iguais e correspondentes a cidades diferentes, a sessão é atribuída à cidade que tiver menor número de habitantes.

A Tabela 2 apresenta o número de habitantes de cada uma das cidades, A, B e C.

Tabela 2

Cidade	A	B	C
N.º de habitantes	4320	1960	6050

Quantas sessões da peça serão apresentadas em cada uma das cidades?

2. Na preparação da sua digressão pelas ilhas do arquipélago dos Açores, a companhia de teatro optou por apresentar a peça somente nas ilhas com, pelo menos, 6000 habitantes.

Na Tabela 3, está registado o número de habitantes em cada uma das ilhas.

Tabela 3

Ilha	N.º de habitantes
Santa Maria	5547
São Miguel	137 699
Terceira	56 062
Graciosa	4393
São Jorge	8998
Pico	14 144
Faial	15 038
Flores	3791
Corvo	430

Fonte: Censos 2011

De modo a minimizar o custo das deslocações aéreas, foram analisados os preços das ligações aéreas diretas, existentes entre as diferentes ilhas, a que a companhia de teatro poderá recorrer.

Na Figura 1, estão indicadas essas ligações aéreas diretas entre as ilhas do arquipélago dos Açores e o respetivo custo, por pessoa.

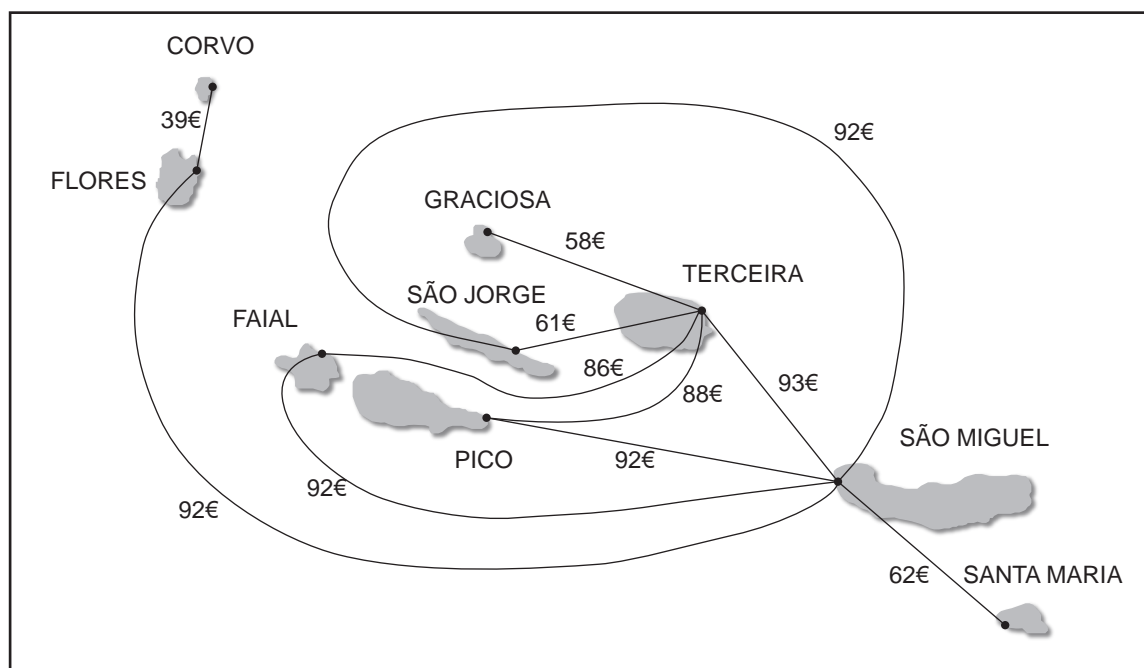


Figura 1

A companhia de teatro optou por começar a digressão na ilha do Faial, pretendendo terminá-la noutra ilha.

De modo a minimizar o custo das viagens, aplicou o método que a seguir se descreve.

- Seleciona-se a ilha seguinte, tendo em conta que:
 - deverá corresponder à viagem de preço mais baixo;
 - se houver duas ilhas para as quais seja possível viajar pelo mesmo preço, a seleção é aleatória.
- Procede-se como foi indicado no ponto anterior, não se repetindo nenhuma ilha e terminando depois de serem visitadas todas as ilhas incluídas na digressão.

Determine o custo mínimo em deslocações aéreas de cada elemento da companhia de teatro na sua digressão pelo arquipélago dos Açores, respeitando as condições definidas.

Na sua resposta, apresente:

- um grafo ponderado que resulte da aplicação do método descrito;
- a ordem pela qual a companhia de teatro visitará as ilhas.

3. O diretor da companhia de teatro, Carlos, e os seus dois irmãos, Ana e Bruno, herdaram uma ilha avaliada em 270 000 PRC (moeda local), sendo a metade sul da ilha avaliada num valor correspondente ao dobro do valor da metade norte.

A ilha tem uma forma aproximadamente circular. Os três irmãos pretendem dividi-la de modo a que cada um fique com uma parcela da ilha correspondente a um terço do seu valor monetário.

Os irmãos decidiram que caberá a Ana dar início à divisão, traçando, num mapa da ilha, um raio. Em seguida, caberá a Bruno, progredindo no sentido dos ponteiros do relógio, traçar um outro raio, de modo a delimitar um sector circular que ele considere resultar de uma divisão justa da ilha. Em seguida, Carlos, progredindo também no sentido dos ponteiros do relógio, delimitará outro sector circular, adjacente ao sector circular delimitado por Bruno.

Completada a divisão da ilha em três sectores circulares, Ana escolherá um destes, Bruno escolherá um dos dois sectores restantes, ficando Carlos com o sector que resta.

Na Figura 2, estão representados:

- um mapa da ilha herdada pelos três irmãos, em que a parte a cinzento representa a metade norte e a parte a branco representa a metade sul;
- os raios traçados por Ana e por Bruno;
- o sector circular delimitado pelos dois raios anteriores, correspondente à parte da ilha que Bruno considera resultar de uma divisão justa.

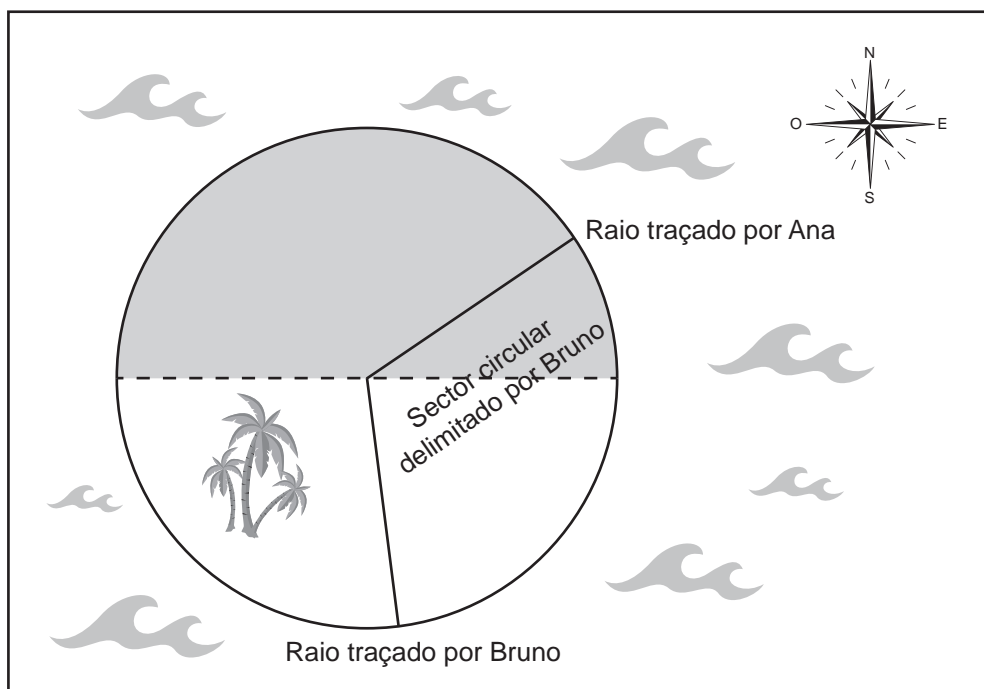


Figura 2

A parte a cinzento do sector circular delimitado por Bruno tem o valor de 15 000 PRC.

Determine a amplitude total, em graus, do sector circular delimitado por Bruno.

4. A peça de teatro estreou num espaço alugado para o efeito.

Antes de celebrar o contrato de aluguer, o diretor da companhia de teatro teve de optar entre duas propostas, A e B.

Na Tabela 4, reproduzem-se as propostas apresentadas pelo proprietário do espaço.

Tabela 4

Proposta A	Proposta B
<ul style="list-style-type: none">• Paga 420 € por cada dia de aluguer, acrescidos de um valor fixo de 4800 €.• As despesas com água e eletricidade estão incluídas.	<ul style="list-style-type: none">• O valor total a pagar pelo período de aluguer, em euros, arredondado às unidades, é dado pela expressão: $V = 3000 \times 1,14^n - 3000$em que n é o número de dias de aluguer.• As despesas com água e eletricidade não estão incluídas.

O espaço foi alugado por um período de 10 dias.

Admita que as despesas com água e eletricidade perfazem 71 € por dia.

O diretor da companhia optou pela proposta B.

Terá sido a decisão mais económica?

Apresente todos os cálculos que efetuar.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, exatamente, quatro casas decimais.

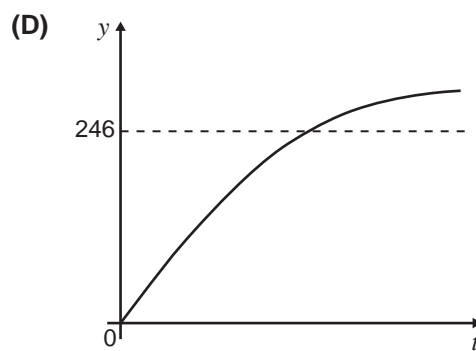
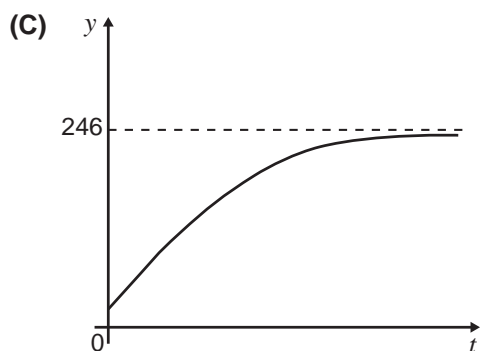
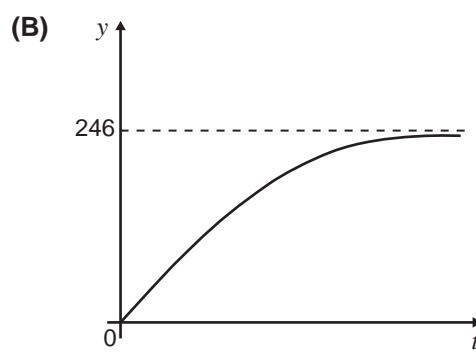
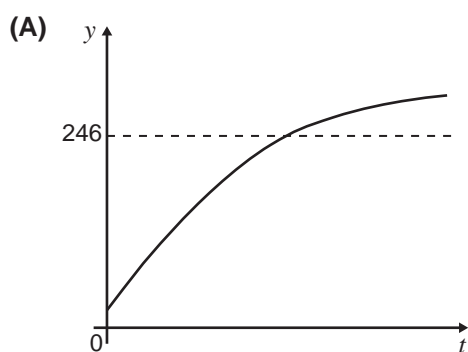
5. Numa das cidades integradas na digressão da companhia de teatro existe um centro náutico.

5.1. Admita que o número de sócios do centro náutico é bem aproximado pelo modelo seguinte

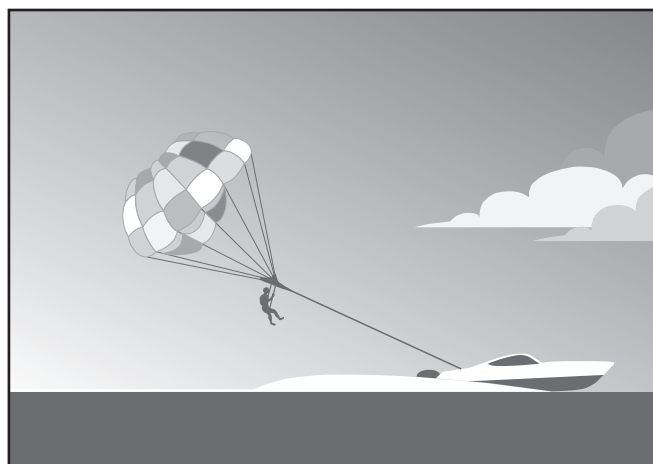
$$N(t) = \frac{246}{1 + ae^{-0,65t}} \quad t \geq 0$$

em que a variável t designa o tempo, em meses, que decorre desde a inauguração do centro náutico, e a é um número real positivo.

Qual das alternativas seguintes pode representar o gráfico de N ?



- 5.2. No centro náutico é possível praticar *parasailing*. Neste desporto, um para-quadras especial, denominado *parasail*, está preso a um barco através de um cabo. O praticante, equipado com o *parasail*, senta-se numa plataforma. Com a deslocação do barco, o *parasail* enche-se de ar e, à medida que a velocidade do barco aumenta, o *parasail* eleva-se nos ares.



Num momento de descanso, um dos atores da peça foi praticar *parasailing*.

Admita que, t minutos após se elevar nos ares, a altura do *parasail*, em metros, é bem aproximada pelo modelo seguinte.

$$A(t) = 1 + 35 \ln(25,5t + 0,98) \quad t \in [0, 5]$$

- 5.2.1. Comparando a altura atingida pelo *parasail* ao fim de 30 segundos e ao fim de 1 minuto, após se elevar nos ares, quanto aumentou, em percentagem, essa altura?

Apresente o resultado com arredondamento às unidades.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve três casas decimais.

- 5.2.2. O ator comentou que o *parasail* se tinha mantido a uma altura entre os 120 e os 150 metros durante, pelo menos, dois minutos.

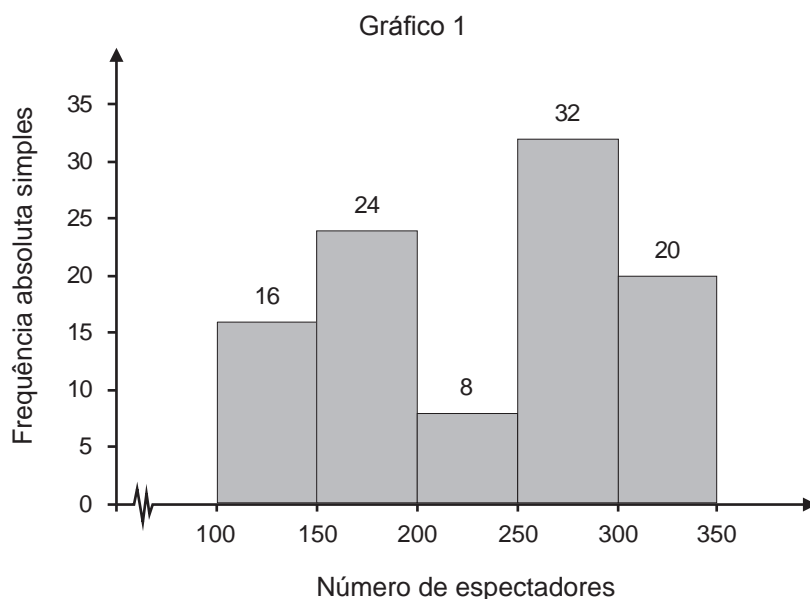
Terá o ator razão?

Para responder a esta questão, recorra às capacidades gráficas da sua calculadora e apresente:

- o(s) gráfico(s) visualizado(s) que lhe permite(m) resolver o problema;
- as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s), com arredondamento às décimas.

6. Foi levado a cabo um levantamento do número de espectadores presentes em 100 sessões da peça realizadas em Portugal Continental.

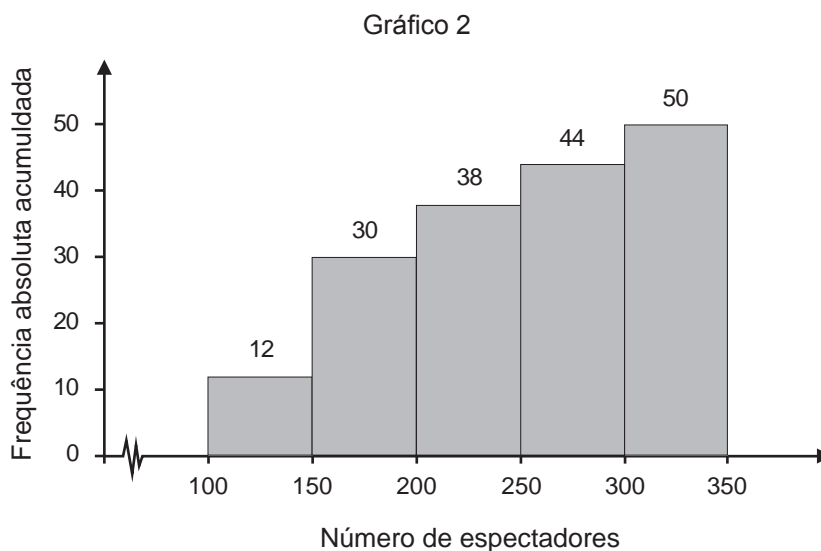
No Gráfico 1, está representado um histograma de frequências absolutas simples dos dados recolhidos.



- 6.1. Verifique se a média dos dados agrupados do número de espectadores por sessão pertence à classe modal.

- 6.2. Foi igualmente levado a cabo um levantamento do número de espectadores presentes nas 50 sessões da peça realizadas nas ilhas dos Açores e da Madeira.

No Gráfico 2, está representado um histograma de frequências absolutas acumuladas dos dados recolhidos.



Construa uma tabela de frequências absolutas simples, considerando os dados das 150 sessões realizadas, 100 em Portugal Continental e 50 nas ilhas dos Açores e da Madeira, mantendo as classes utilizadas.

7. Numa das sessões da peça, os 220 espectadores ocuparam lugares na plateia e no balcão da sala de teatro.

Na Tabela 5, estão registados dados relativos à ocupação dos lugares dessas duas áreas.

Tabela 5

	Plateia	Balcão
Mulheres	73	42
Homens	59	46

7.1. Escolhe-se, ao acaso, uma pessoa presente na sessão.

A probabilidade, arredondada às centésimas, de essa pessoa ser mulher, sabendo-se que ocupa um lugar no balcão, é igual a

- (A) 0,19
- (B) 0,48
- (C) 0,52
- (D) 0,55

7.2. Os espectadores desta sessão, referidos na Tabela 5, adquiriram os seus bilhetes quer *online* quer na bilheteira do teatro.

Nesta sessão:

- 80% dos espectadores adquiriram os bilhetes *online*;
- $\frac{3}{4}$ dos espectadores que não adquiriram os bilhetes *online* ocuparam lugares na plateia.

Escolhe-se, ao acaso, uma pessoa presente na sessão.

Determine a probabilidade de essa pessoa ocupar um lugar na plateia, sabendo-se que ela adquiriu o seu bilhete *online*.

Apresente o resultado em percentagem.

7.3. Escolhem-se aleatoriamente duas mulheres, uma a seguir à outra, de entre as presentes na sessão.

Calcule a probabilidade de apenas uma das mulheres escolhidas ocupar um lugar na plateia.

Apresente o resultado em percentagem, com arredondamento às unidades.

8. O diretor da companhia de teatro solicitou ao seu contabilista um estudo sobre o valor médio das receitas de bilheteira por cada sessão realizada.

O contabilista recolheu os dados das receitas de bilheteira de uma amostra de 50 sessões. Com base nessa amostra, obteve, para o valor médio das receitas de bilheteira por sessão, o intervalo de confiança a 95% seguinte:]4449,691; 5214,309[.

Determine a média e o desvio padrão das receitas de bilheteira obtidos pelo contabilista nessas 50 sessões.

Apresente o valor do desvio padrão amostral com arredondamento às unidades.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, exatamente, três casas decimais.

FIM

COTAÇÕES

Item														TOTAL
Cotação (em pontos)														
1.1.	1.2.	2.	3.	4.	5.1.	5.2.1.	5.2.2.	6.1.	6.2.	7.1.	7.2.	7.3.	8.	
8	16	16	16	16	8	16	16	16	16	8	16	16	16	200

Prova 835

2.^a Fase