

## Exame Final Nacional de Matemática B Prova 735 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2023

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 22/2023, de 3 de abril

### Critérios de Classificação

10 Páginas

#### CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

Os critérios de classificação podem apresentar-se organizados apenas por níveis de desempenho, por parâmetros, com os respetivos níveis de desempenho, ou por etapas.

Nos itens em que os critérios de classificação se apresentam organizados apenas por níveis de desempenho, a cada nível de desempenho corresponde uma dada pontuação. Se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

Nos itens em que os critérios de classificação se apresentam organizados por parâmetros, a classificação a atribuir à resposta resulta da soma das pontuações atribuídas aos parâmetros seguintes: (A) Conteúdos, (B) Organização e linguagem científica. A atribuição da classificação de zero pontos no parâmetro (A) implica a atribuição de zero pontos no parâmetro (B).

Nos itens em que os critérios de classificação se apresentam organizados por etapas, a classificação a atribuir à resposta resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

As respostas que não apresentem exatamente os termos ou expressões constantes nos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação de todos os elementos visualizados na sua utilização, nomeadamente, a representação, em referencial cartesiano, do(s) gráfico(s) visualizado(s).

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelos documentos curriculares de referência da disciplina. O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplo: «recorrendo à regressão sinusoidal»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando a resolução do item exige cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não alterem o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, a pontuação é atribuída de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal, na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista (ver nota).
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado em centímetros, e a resposta apresenta-se em metros].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.

13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.  As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os critérios gerais e específicos de classificação.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada.  Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto:  – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos;  – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

**Nota** – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

## CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

<b>1.</b>		<b>20 pontos</b>
	Identificar a função objetivo $(L(x, y) = 2,5x + 3y)$ .....	1 ponto
	Identificar as restrições $0,45x + 0,40y \leq 218,50$ , $0,40x + 0,25y \leq 168,15$ e $0,15x + 0,35y \leq 140$ .....(3 × 1).....	3 pontos
	Identificar as restrições $x \geq 0$ e $y \geq 0$ .....	1 ponto
	Representar graficamente a região admissível .....	5 pontos
	Representar graficamente as retas de equações $0,45x + 0,40y = 218,50$ , $0,40x + 0,25y = 168,15$ e $0,15x + 0,35y = 140$ .....(3 × 1).....	3 pontos
	Assinalar a região admissível .....	2 pontos
	Obter as coordenadas dos vértices do polígono, exceto a origem ((420,375; 0), (266; 247), (210; 310) e (0; 400)) .....(4 × 1).....	4 pontos
	Calcular o custo correspondente a cada um dos vértices do polígono, exceto a origem (ou implementar o método da paralela à reta de nível zero – <b>ver nota</b> ) ..... (4 × 1).....	4 pontos
	Apresentar os valores pedidos (210 kg de concentrado do tipo I e 310 kg de concentrado do tipo II).....	2 pontos
	<b>Nota</b> – No caso de ser implementado o método da paralela à reta de nível zero, se apenas for representada, corretamente, esta reta, a pontuação a atribuir nesta etapa é 1 ponto.	
<b>2.</b>		<b>16 pontos</b>
	Identificar o valor pedido com $P(X = 0)$ .....	4 pontos
	Reconhecer que $P(X = 0) = 1 - P(X > 0)$ (ou equivalente) .....	4 pontos
	Obter $0,01 + 0,02 + 0,05 + 0,09 + 0,41 + 0,21 + 0,21 = 1$ .....	4 pontos
	Concluir que a probabilidade pedida é 0 .....	4 pontos
<b>3.1.</b>		<b>16 pontos</b>
	Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.	
	<b>1.º Processo</b>	
	Reconhecer que os números de círculos assinalados em cada etapa são termos consecutivos de uma progressão aritmética cujo primeiro termo é 2 .....	3 pontos
	Indicar a razão dessa progressão (2) .....	4 pontos
	Escrever uma expressão que permita calcular o termo de ordem 15 .....	5 pontos
	Obter o valor pedido (30 círculos) .....	4 pontos
	<b>2.º Processo</b>	
	Obter o número de círculos que foram assinalados em cada etapa , da 1. <sup>a</sup> à 14. <sup>a</sup> (2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26 e 28) .....	14 pontos
	Apresentar o valor pedido (30 círculos) .....	2 pontos

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

**1.º Processo**

Escrever uma expressão para o termo de ordem  $n$   
 $(2 + 2(n - 1), \text{ ou equivalente})$  ..... 3 pontos

Escrever uma expressão para a soma de  $n$  termos consecutivos  
 $(\frac{2 + 2 + 2(n - 1)}{2} \times n, \text{ ou equivalente})$  ..... 3 pontos

Igualar a expressão anterior a 72 ..... 2 pontos

Resolver a equação  $\frac{2 + 2 + 2(n - 1)}{2} \times n = 72$  (ou equivalente) ..... 5 pontos

Esta etapa pode ser resolvida por, pelo menos, três processos.

**Processo A**

Apresentar uma tabela com os primeiros oito termos da sucessão  
 de termo geral  $n^2 + n$  ..... 3 pontos

Identificar o valor de  $n$  (8) ..... 2 pontos

**Processo B**

Obter  $n^2 + n - 72 = 0$  (ou equivalente) ..... 3 pontos

Obter  $n = 8$  ..... 2 pontos

**Processo C**

Representar graficamente a função definida por  $y = x^2 + x$   
 (ver nota) ..... 2 pontos

Representar graficamente a reta de equação  $y = 72$   
 (ver nota) ..... 1 ponto

Assinalar o ponto de intersecção dos gráficos de  
 abcissa positiva ..... 1 ponto

Obter  $n = 8$  ..... 1 ponto

Concluir que tinha sido escrita a letra H ..... 3 pontos

**Nota** – Se não for representado o referencial, a soma das pontuações a atribuir nestes passos é desvalorizada em 2 pontos.

**2.º Processo**

Indicar o número de círculos assinalados da 1.ª etapa à 8.ª etapa  
 $(2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 \text{ e } 16)$  ..... 8 pontos

Obter a soma desses números (72) ..... 5 pontos

Concluir que tinha sido escrita a letra H ..... 3 pontos

**4.1. .... 16 pontos**

- Identificar a altura da árvore no instante em que foi plantada com  $h(0)$  ..... 2 pontos
- Identificar a altura da árvore um ano após ter sido plantada com  $h(1)$  ..... 2 pontos
- Obter  $h(0)$  (0,641...) ..... 2 pontos
- Obter  $h(1)$  (1,103...) ..... 2 pontos
- Identificar o valor pedido com  $h(1) - h(0)$  ..... 5 pontos
- Obter o valor pedido (46 cm) ..... 3 pontos

**4.2. .... 16 pontos**

- Traduzir o problema por uma condição ( $h(t) > 7$ , ou equivalente)  
(**ver nota 1**) ..... 2 pontos
- Resolver a inequação  $h(t) > 7$  ..... 11 pontos

Esta etapa pode ser resolvida por, pelo menos, dois processos.

**1.º Processo**

- Representar graficamente a função  $h$  (**ver notas 2 e 3**) ..... 6 pontos
- Representar graficamente a reta de equação  $y = 7$   
(**ver nota 2**) ..... 2 pontos
- Assinalar o ponto de intersecção dos gráficos ..... 1 ponto
- Obter a abcissa desse ponto (5,3658...) ..... 2 pontos

**2.º Processo**

- Isolar  $e^{-0,58t}$  ..... 4 pontos
- Escrever  $-0,58t < \ln 7$  (ou equivalente) ..... 4 pontos
- Obter  $t > 5,3658...$  ..... 3 pontos

Apresentar o valor pedido (5 anos e 4 meses) (**ver nota 4**) ..... 3 pontos

**Notas:**

1. Se for apresentado  $h(t) = 7$ ,  $h(t) \geq 7$ ,  $h(t) < 7$  ou  $h(t) \leq 7$ , a pontuação a atribuir nesta etapa não é desvalorizada.
2. Se não for representado o referencial, a soma das pontuações a atribuir nestes passos é desvalorizada em 2 pontos.
3. Se não for respeitado o domínio, a pontuação a atribuir neste passo é desvalorizada em 1 ponto.
4. Se for apresentado 5 anos e 5 meses, a pontuação a atribuir nesta etapa não é desvalorizada.

**4.3. .... 16 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, três processos.

**1.º Processo**

Reconhecer que a reta de equação  $y = 13$  é assíntota horizontal ao gráfico da função  $h$  (ver notas 1 e 2) ..... 8 pontos

Referir que a função  $h$  é crescente (ver notas 1 e 2) ..... 6 pontos

Concluir que não é possível ..... 2 pontos

**Notas:**

1. Em alternativa, pode apenas ser referido que a função  $h$  é uma função logística.
2. Se apenas forem representados o gráfico da função  $h$  e a reta de equação  $y = 13$ , a soma das pontuações a atribuir nestas etapas não deve ser desvalorizada.

**2.º Processo**

Escrever  $h(t) = 13,5$  ..... 3 pontos

Isolar  $e^{-0,58t}$  ..... 6 pontos

Concluir que a equação é impossível ..... 5 pontos

Concluir que não é possível ..... 2 pontos

**3.º Processo**

Escrever  $e^{-0,58t} > 0$  ..... 4 pontos

Escrever  $19,26 e^{-0,58t} > 0$  ..... 3 pontos

Escrever  $1 + 19,26 e^{-0,58t} > 1$  ..... 3 pontos

Reconhecer que  $h(t) < 13$  ..... 4 pontos

Concluir que não é possível ..... 2 pontos

**5. .... 16 pontos**

Identificar a produção anual em 2021 com a diferença  $49\,566 - 38\,972$  ..... 7 pontos

Obter a produção anual em 2021 (10 594) ..... 2 pontos

Obter o valor pedido (9 milhares de toneladas) ..... 7 pontos

**6.1. .... 16 pontos**

Referir que a taxa de variação instantânea da função  $f$  tem maior valor no instante  $t = 5,5$  ..... 4 pontos

Referir que a altura da água no depósito estava a aumentar mais rapidamente no instante  $t = 5,5$  do que no instante  $t = 0,5$  (ou equivalente) OU Referir que o declive da reta tangente ao gráfico de  $h$  em  $t = 5,5$  é maior do que o declive da reta tangente ao gráfico de  $h$  em  $t = 0,5$  (ou equivalente) ..... 12 pontos

6.2. .... 20 pontos

**Tópicos de resposta**

- Justificação de que o depósito A não pode ser o existente na quinta do Sr. Ferreira.

**Exemplo de resposta:**

– «No depósito A, a subida da água seria mais rápida no início e mais lenta no final, ao contrário do que se representa no gráfico de  $f$ .»

- Justificação de que o depósito B não pode ser o existente na quinta do Sr. Ferreira.

**Exemplos de resposta:**

– «No depósito B, a água subiria a uma velocidade constante, diferentemente do que se representa no gráfico de  $f$ .»

– «O gráfico da função correspondente ao depósito B seria retilíneo.»

Parâmetros	Níveis	Descritores de desempenho	Pontuação
<b>A</b> Conteúdos	4	Apresenta, de forma completa, as duas justificações solicitadas.	16
	3	Apresenta, de forma completa, uma das justificações solicitadas e, de forma incompleta, a outra justificação.	12
	2	Apresenta, de forma completa, apenas uma das justificações solicitadas. OU Apresenta, de forma incompleta, as duas justificações solicitadas.	8
	1	Apresenta, de forma incompleta, apenas uma das justificações solicitadas.	4
<b>B</b> Organização e linguagem científica	2	Escreve um texto organizado e utiliza adequadamente o vocabulário específico da Matemática.	4
	1	Escreve um texto com falhas na organização ou na utilização do vocabulário específico da Matemática.	2

7.1. .... 16 pontos

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

**1.º Processo**

- Considerar um quadrado de lado 20 cm ..... 3 pontos
- Obter a área desse quadrado (400) ..... 1 ponto
- Obter a área de um círculo de raio 10 cm (314,159...) ..... 3 pontos
- Obter a diferença entre as duas áreas (85,840...) ..... 4 pontos
- Obter metade desta diferença (42,920...) ..... 4 pontos
- Apresentar o valor pedido (43 cm<sup>2</sup>) ..... 1 ponto



## 2.º Processo

Considerar um quadrado de lado 10 cm .....	3 pontos
Obter a área desse quadrado (100) .....	1 ponto
Obter a área de um quarto de círculo de raio 10 cm (78,539...) .....	3 pontos
Obter a diferença entre as duas áreas (21,460...) .....	4 pontos
Obter o dobro desta diferença (42,920...) .....	4 pontos
Apresentar o valor pedido (43 cm <sup>2</sup> ) .....	1 ponto

## 7.2. .... 16 pontos

Escrever $\overline{OP}^2 = 30^2 + 40^2$ (ou equivalente) .....	2 pontos
Obter $\overline{OP}$ (50) .....	1 ponto
Reconhecer que as coordenadas do ponto $Q$ se obtêm utilizando uma semelhança de triângulos .....	1 ponto
Escrever uma proporção que permita obter a abscissa do ponto $Q$ .....	4 pontos
Obter o valor dessa abscissa (36) .....	2 pontos
Escrever uma proporção que permita obter a ordenada do ponto $Q$ .....	4 pontos
Obter o valor dessa ordenada (48) .....	2 pontos

## 8.1. .... 16 pontos

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

### 1.º Processo

Reconhecer que a distância mínima do ponto $A$ ao solo é 0 cm .....	3 pontos
Representar graficamente a função $a$ (ver nota) .....	4 pontos
Assinalar um ponto do gráfico cuja ordenada seja o valor máximo da função $a$ .....	4 pontos
Obter a ordenada desse ponto (40) .....	2 pontos
Concluir que o raio da roda é 20 cm .....	3 pontos

**Nota** – Se for representada uma restrição da função  $a$  num intervalo de extremos  $0$  e  $m$ , com  $0 < m \leq 10$ , que permita visualizar um ponto relevante para a resolução do problema, a pontuação a atribuir nesta etapa não é desvalorizada. Se for representado um prolongamento da função  $a$ , a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 1 ponto. Se não for representado o referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 2 pontos.

## 2.º Processo

- Referir que o argumento da função cosseno toma valores de um intervalo com amplitude superior a  $2\pi$  ..... 1 ponto
- Escrever  $-1 \leq \cos\left(\frac{25\pi}{16}t\right) \leq 1$  ..... 5 pontos
- Escrever  $-20 \leq -20 \cos\left(\frac{25\pi}{16}t\right) \leq 20$  ..... 4 pontos
- Escrever  $0 \leq 20 - 20 \cos\left(\frac{25\pi}{16}t\right) \leq 40$  ..... 3 pontos
- Concluir que o raio da roda é 20 cm ..... 3 pontos

## 8.2. .... 16 pontos

- Identificar a distância do ponto  $A$  ao solo com  $a(8)$  ..... 1 ponto
- Obter  $a(8)$  (20) ..... 2 pontos
- Reconhecer que, após 8 segundos, o ponto  $A$  se situa no extremo esquerdo do diâmetro da roda traseira, paralelo ao solo (**ver nota**) ..... 4 pontos
- Identificar a distância do ponto  $B$  ao solo com  $b(8)$  ..... 1 ponto
- Obter  $b(8)$  (0) ..... 2 pontos
- Considerar o triângulo retângulo  $[APB]$ , sendo  $P$  a projeção ortogonal do ponto  $A$  sobre o solo ..... 1 ponto
- Obter  $\overline{PB}$  (110) ..... 1 ponto
- Escrever  $\overline{AB}^2 = 110^2 + 20^2$  ..... 2 pontos
- Apresentar o valor pedido (112 cm) ..... 2 pontos

**Nota** – Se for considerado que o ponto  $A$  se situa no extremo direito do diâmetro da roda traseira, paralelo ao solo, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 2 pontos.

## COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 9 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	1.	2.	3.1.	4.1.	4.2.	5.	6.2.	7.2.	8.2.	Subtotal
Cotação (em pontos)	20	16	16	16	16	16	20	16	16	152
Destes 5 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	3.2.	4.3.	6.1.	7.1.	8.1.					Subtotal
Cotação (em pontos)	3 × 16 pontos									48
<b>TOTAL</b>										<b>200</b>