

Exame Final Nacional de Matemática B
Prova 735 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2023

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 22/2023, de 3 de abril

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

8 Páginas

A prova inclui 9 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 5 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos visualizados na sua utilização, mais precisamente, consoante a situação:

- os gráficos obtidos, com os pontos relevantes para a resolução assinalados (por exemplo, pontos de intersecção de gráficos, pontos de máximos e pontos de mínimos);
- as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r}{180}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r^2}{360}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r – raio)

Área lateral de um cilindro reto: $2 \pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Cilindro: $\text{Área da base} \times \text{Altura}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n) :

• **Progressão aritmética:** $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

• **Progressão geométrica:** $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Probabilidades e Estatística

Se X é uma variável aleatória discreta de valores x_i com probabilidade p_i , então:

• **Valor médio de X :**

$$\mu = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$$

• **Desvio padrão de X :**

$$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \dots + p_n (x_n - \mu)^2}$$

Se X é uma variável aleatória normal de valor médio μ e desvio padrão σ , então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$$

- * 1. Uma empresa do sector da alimentação decidiu produzir dois suplementos alimentares, I e II, ambos feitos à base de maçã, amendoim e chocolate.

Cada embalagem do suplemento I tem o custo de 2,00 € e contém 0,4 kg de maçã, 0,5 kg de amendoim e 0,6 kg de chocolate.

Cada embalagem do suplemento II tem o custo de 1,50 € e contém 0,6 kg de maçã, 0,5 kg de amendoim e 0,4 kg de chocolate.

Para otimizar a produção, a empresa tem de gastar, diariamente, pelo menos, 140 kg de maçã, pelo menos, 150 kg de amendoim e, pelo menos, 140 kg de chocolate.

A empresa não consegue produzir mais do que 350 embalagens por dia.

Quantas embalagens do suplemento I e quantas embalagens do suplemento II devem ser produzidas, diariamente, pela empresa, para que o custo total diário da produção dos dois suplementos seja mínimo?

Na sua resposta, designe por x o número de embalagens do suplemento I e por y o número de embalagens do suplemento II a produzir, diariamente, pela empresa, e apresente:

- a função objetivo;
- as restrições do problema;
- uma representação gráfica referente ao sistema de restrições;
- o valor de x e o valor de y correspondentes à solução do problema.

- * 2. A tabela seguinte é referente ao número de maçãs e ao peso* médio, em gramas, das maçãs produzidas por algumas das macieiras de um pomar, na colheita do ano de 2022.

Considere adequado o modelo de regressão linear de y sobre x obtido a partir dos dados apresentados na tabela.

Uma outra macieira do pomar produziu 160 maçãs na colheita do ano de 2022.

Estime, com base no modelo proposto, o peso médio dessas maçãs.

Na sua resposta, apresente:

- os valores dos parâmetros da equação da reta de regressão linear de y sobre x , arredondados às milésimas;
- o valor pedido em gramas, arredondado às décimas.

Número de maçãs por macieira (x)	Peso médio, em gramas, das maçãs (y)
318	163,87
661	94,72
530	106,58
214	166,75
360	148,08
114	212,06
632	134,91
483	115,02
93	226,40
470	139,72

* Na sua aceção corrente, a palavra «peso» é utilizada como sinónimo de massa.

3. Na aldeia do Sr. Silva, para se conservar as maçãs colhidas nos pomares, é costume guardá-las num local escuro, dispostas sobre uma superfície seca e plana.

As maçãs são dispostas em filas, mas sem ficarem em contacto umas com as outras, pois, caso ficassem em contacto, se uma das maçãs apodrecesse, as maçãs sadias em contacto com a maçã apodrecida também começariam a apodrecer.

O neto do Sr. Silva, que não conhecia bem o método usado pelo avô, dispôs as maçãs em filas, mas deixou-as em contacto umas com as outras, como se ilustra na Figura 1.



Figura 1

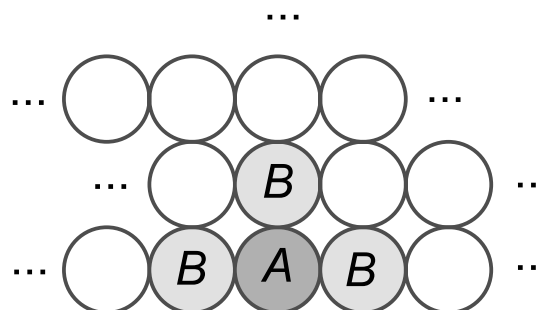


Figura 2

Uma dessas maçãs, identificada por A na Figura 2, apodreceu num certo dia.

No dia seguinte, apodreceram as três maçãs identificadas por B na Figura 2, que estavam em contacto com essa maçã. Em cada um dos dias seguintes, apodreceram todas as maçãs sadias que estavam em contacto com, pelo menos, uma maçã que tivesse apodrecido no dia anterior.

Admita que não há outro modo de as maçãs colhidas apodrecerem.

Tal como a Figura 2 sugere, as maçãs apodrecidas dispõem-se em forma triangular. Esta expansão triangular manteve-se durante 12 dias consecutivos.

- * 3.1. Justifique que os números de maçãs que apodrecem, por dia, desde o primeiro até ao décimo segundo, são termos consecutivos de uma progressão aritmética.

Na sua resposta, indique a razão dessa progressão.

- 3.2. Do primeiro ao décimo segundo dia, apodreceram 80% das maçãs colhidas.

Quantas maçãs foram colhidas?

Justifique a sua resposta.

4. Numa unidade industrial de armazenamento de fruta, as maçãs são sujeitas a um banho de arrefecimento antes de serem armazenadas.

Admita que a temperatura, T , em graus Celsius, das maçãs, x minutos após o início do banho de arrefecimento, é dada por

$$T(x) = -3 + (T_0 + 3)e^{-0,0432365x}, \text{ com } x \geq 0,$$

em que T_0 é a temperatura, em graus Celsius, das maçãs no início do banho.

Para serem armazenadas, as maçãs devem estar a uma temperatura inferior a 7°C .

* 4.1. Num certo dia, as maçãs estavam à temperatura de 25°C quando se iniciou o banho de arrefecimento.

As maçãs estariam nas condições de armazenamento descritas 27 minutos após o início desse banho? Justifique a sua resposta.

4.2. Num outro dia, as maçãs estavam à temperatura de 33°C quando se iniciou o banho de arrefecimento.

* 4.2.1. Determine a duração mínima do banho de arrefecimento, para que as maçãs pudessem ser armazenadas.

Apresente o resultado em minutos, arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, sempre que proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

4.2.2. Seja V a função que dá a taxa de variação instantânea da função T , para cada valor de x . Interprete, no contexto descrito, o significado de $V(16) \approx -0,78$.

* 5. O bravo-de-esmolfe é uma variedade portuguesa de maçã, com origem na aldeia de Esmolfe, situada no concelho de Penalva do Castelo.

Numa colheita, foram apanhadas 50 000 maçãs bravo-de-esmolfe.

Dessa colheita, serão comercializadas apenas as maçãs com calibre superior a 55 mm.

Admita que o calibre, em milímetros, das maçãs colhidas segue, aproximadamente, uma distribuição normal de valor médio 60 mm e desvio padrão 5 mm.

Determine quantas maçãs dessa colheita se espera comercializar.

Apresente o resultado em milhares, arredondado às unidades de milhar.

Em cálculos intermédios, sempre que proceder a arredondamentos, conserve quatro casas decimais.

6. Admita que o número de horas de sol, S , em Penalva do Castelo, no dia de ordem x do ano de 2022 é dado por

$$S(x) = 12,1237 + 2,8720 \operatorname{sen}(0,0168x - 1,3255), \quad \text{para } x \in \{1, 2, \dots, 365\}$$

O argumento da função seno está em radianos.

No dia 1 de janeiro de 2022, em Penalva do Castelo, o sol nasceu às 7h 56min. Nesse dia, o Sr. Silva esteve no pomar desde as 15 horas até ao pôr do sol.

Quanto tempo esteve o Sr. Silva no pomar?

Apresente o resultado em horas e minutos, com os minutos arredondados às unidades.

Em cálculos intermédios, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

7. O preço por quilograma de maçãs pode variar em função do seu peso* médio.

Admita que o valor a pagar, P , em euros, por quilograma de uma variedade de maçãs, em função do peso médio das maçãs, x , em gramas, é dado, aproximadamente, por

$$P(x) = 1,059 \ln(x) - 3,2553, \text{ com } 40 \leq x \leq 270$$

A avó Maria comprou cinco maçãs, com os pesos que se seguem, em **gramas**:

181 g ; 185 g ; 188 g ; 190 g ; 192 g .

Determine, de acordo com o modelo apresentado, o preço por quilograma das maçãs que a avó Maria comprou.

Apresente o valor pedido em euros, arredondado às centésimas.

Em cálculos intermédios, sempre que proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

* Na sua aceção corrente, a palavra «peso» é utilizada como sinónimo de massa.

* 8. No pomar do Sr. Silva, existe um depósito cilíndrico com 2,5 m de altura, assente por uma das bases, como se ilustra na Figura 3.

O depósito encontrava-se vazio, e o seu enchimento, que demorou 6 horas, foi feito a partir de uma torneira com caudal constante.

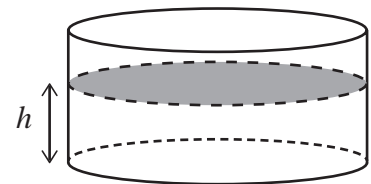


Figura 3

Seja h a função que dá a altura, em metros, de água no depósito, t horas após o início do seu enchimento, até ao instante em que o depósito ficou cheio.

Na Figura 4, estão representados os gráficos A e B de duas funções.

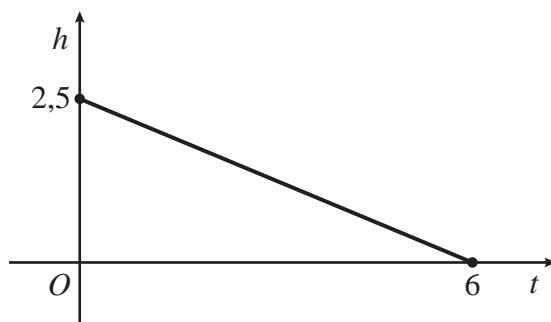


Gráfico A

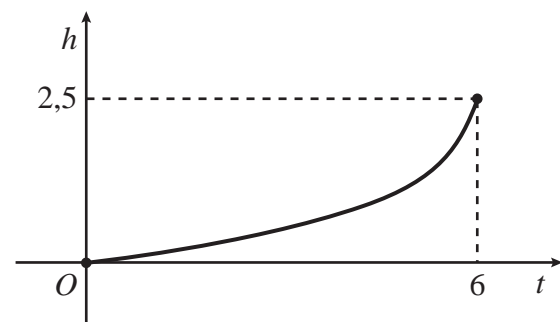


Gráfico B

Figura 4

Considere a afirmação:

«Nem o gráfico A nem o gráfico B podem representar a função h .»

Justifique que a afirmação anterior é verdadeira, apresentando uma razão para cada um dos gráficos.

9. A Figura 5 é uma fotografia de uma forma, com formato de tronco de cone, que a avó Maria usa para fazer o seu bolo de maçã.



Figura 5

No esquema da Figura 6, o tronco de cone, representado a sombreado, foi obtido a partir do cone circular reto de vértice V e base de diâmetro $[AB]$, por um corte paralelo a esta base.

Neste esquema, que não está à escala:

- o tronco de cone representa a forma e tem 10 cm de altura;
- $[AB]$ representa um diâmetro da circunferência que delimita o bordo da forma e mede 22 cm ;
- $[CD]$ representa um diâmetro da base da forma;
- o cone de vértice V e base de diâmetro $[CD]$ tem 45 cm de altura.

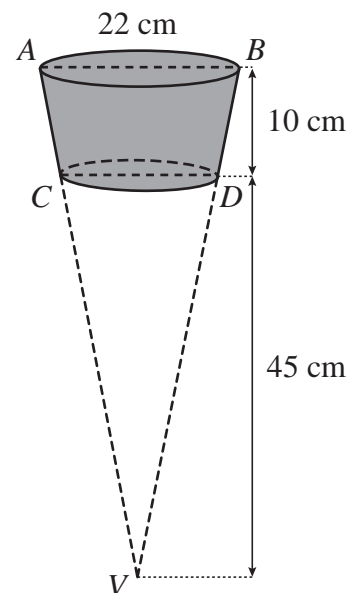


Figura 6

* 9.1. Determine a capacidade da forma.

Apresente o resultado em litros, arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

9.2. No cone de vértice V e base de diâmetro $[AB]$, esquematizado na Figura 6, fixou-se um referencial ortogonal e monométrico, $Oxyz$, como se representa na Figura 7. No referencial, a unidade é o centímetro.

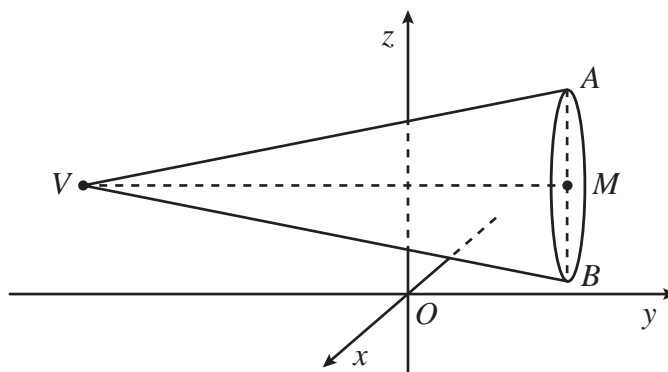


Figura 7

Nesta figura:

- $[MV]$ representa a altura do cone, e as coordenadas dos seus pontos são do tipo $(5, y, 4)$;
- o ponto M tem ordenada igual a 21 .

Determine as coordenadas do ponto V .

- * 10. Há formigas que, tendo saído do seu formigueiro, têm a percepção da distância horizontal a que estão do formigueiro, mesmo que no exterior tenham executado percursos complexos com subidas e descidas.

Uma formiga sobe por uma maçã, a partir do solo. Admita que a maçã é uma esfera, que a formiga é um ponto e que o percurso da formiga na superfície esférica é um arco de um círculo máximo da esfera, contido num plano vertical que passa pela entrada do formigueiro.

A situação está representada na Figura 8, que não está à escala.

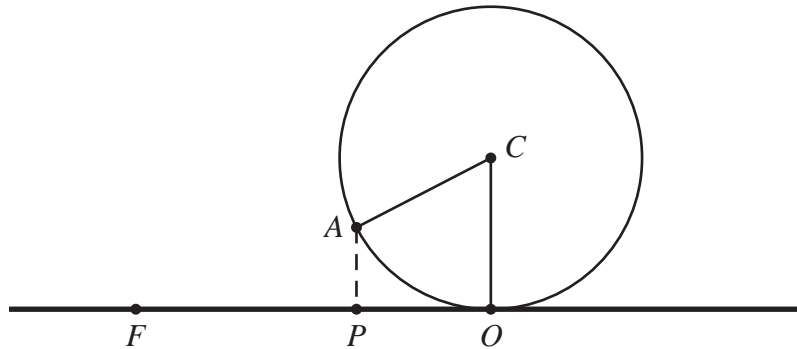


Figura 8

Nesta figura:

- a reta FO representa o solo, horizontal, sendo F a entrada do formigueiro e O o ponto de tangência da maçã com o solo, com $\overline{FO} = 40$ cm ;
- a circunferência, de centro C , que passa em O e tem diâmetro $7,2$ cm , representa o círculo máximo;
- o ponto A , pertencente à circunferência, representa a posição da formiga depois de percorrer a distância de $3,77$ cm , correspondente ao comprimento do arco OA ;
- o ponto P é a projeção ortogonal de A sobre FO .

Determine a distância horizontal, \overline{FP} , a que a formiga está do formigueiro.

Apresente o resultado em centímetros, arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, sempre que proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 9 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	1.	2.	3.1.	4.1.	4.2.1.	5.	8.	9.1.	10.	Subtotal
Cotação (em pontos)	20	16	16	16	16	16	20	16	16	152
Destes 5 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	3.2.	4.2.2.	6.	7.	9.2.					Subtotal
Cotação (em pontos)	3 × 16 pontos									48
TOTAL										200