Associação de Professores de Matemática
Contactos:
Rua Dr. João Couto, n.º 27-A
1500-236 Lisboa
Tel.: +351 21 716 36 90 / 21 711 03 77
Fax: +351 21 716 64 24
http://www.apm.pt
email: geral@apm.pt

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA B DO ENSINO SECUNDÁRIO (CÓDIGO DA PROVA 735) – 1ª FASE – 23 DE JUNHO 2017

Grupo I

1.

A função objetivo é o lucro obtido com a venda de x pães do tipo A e y pães do tipo B:

$L(x, y) = 0{,}25x + 0{,}20y$

Restrições do problema:

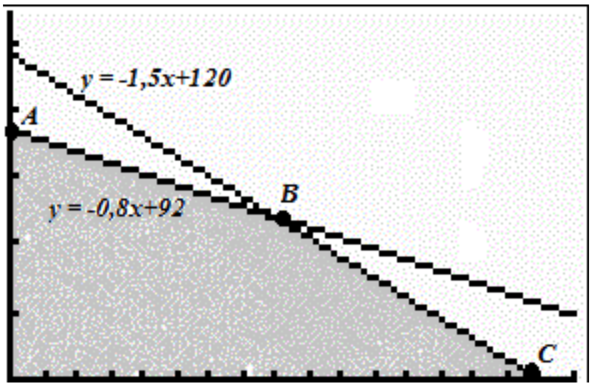
$x \geq 0$

$y \geq 0$

$0{,}06x + 0{,}075y \leq 6{,}9 \Leftrightarrow 0{,}8x + y \leq 92$ (dividindo os termos da desigualdade por 0,075. Na calculadora introduzir a expressão $y \leq -0{,}8x + 92$)

$0{,}03x + 0{,}02y \leq 2{,}4 \Leftrightarrow 1{,}5x + y \leq 120$ (dividindo os termos da desigualdade por 0,02. Na calculadora introduzir a expressão $y \leq -1{,}5x + 120$)

Representação gráfica da região admissível:



Vértice	x	y	$L(x, y) = 0{,}25x + 0{,}20y$
A	0	92	18,40
B	**40**	**60**	**22,00**
C	80	0	20,00

Solução do problema: $x = 40$, $y = 60$.

O lucro máximo possível desse dia, 22,00€, obtém-se com a produção de 40 pães do tipo A e 60 do tipo B.

2.

Tendo em conta que, $P\left(X = 1{,}6 \right) = \frac{1}{2}$, $P\left(X = 1 \right) = P\left(X = 1{,}35 \right) = \frac{1}{4}$, então o valor médio da variável aleatória X é:

$\mu = 1{,}6 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{4} + 1{,}35 \times \frac{1}{4} = 1{,}3875$

Resposta: O valor médio da variável aleatória X é 1,39 euros.

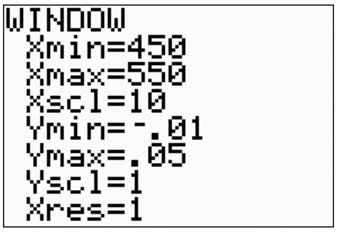
3.

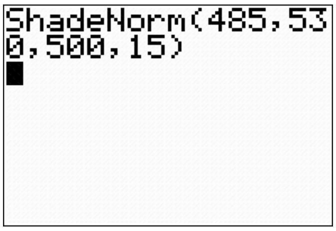
$\mu - \sigma : 500 - 15 = 485$

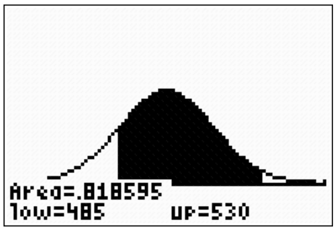
$\mu + 2\sigma : 500 - 2 \times 15 = 530$

Seja X a variável aleatória. A probabilidade do pão escolhido estar corretamente embalado é dada por:

$P\left(485 \le X \le 530 \right) \approx 0{,}818595$







A probabilidade do pão escolhido não estar corretamente embalado é $1 - 0{,}818595 = 0{,}181405 \approx 0{,}18$.

Resposta: A probabilidade do pão escolhido não estar corretamente embalado é 0,18.

Grupo II

1.

$h(t) = 2{,}15 + \ln(8{,}9 - 0{,}51\,t)$

A altura inicial da água no reservatório é dada por:

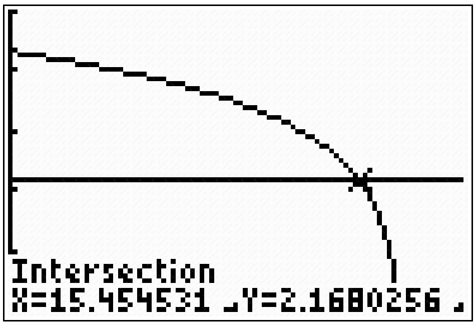
$h(0) = 2{,}15 + \ln(8{,}9 - 0{,}51 \times 0) = 2{,}15 + \ln(8{,}9)$.

Metade da altura do reservatório:

$\frac{h(0)}{2} = \frac{2{,}15 + \ln 8{,}9}{2}$.

O valor da abcissa do ponto de interseção da reta $y = \frac{2{,}15 + \ln 8{,}9}{2}$ com o gráfico de h corresponde ao tempo, após o início do esvaziamento, em que a altura da água é igual a metade da altura do reservatório.

Representação gráfica da função h e da reta $y = \frac{2{,}15 + \ln 8{,}9}{2}$ e do ponto de interseção das duas curvas.



Resposta: Ao fim de 15,5 horas a altura da água é igual a metade da altura do reservatório.

2.

Criaram-se duas listas na calculadora, de acordo com os dados fornecidos:

Lista 1	0,32	1,47	3,85	4,29	4,76	5,01	5,86
Lista 2	4,18	3,62	2,78	2,18	1,79	1,72	0,35

Utilizando na calculadora a função CubicReg (regressão cúbica) determinaram-se os valores para $a = -0{,}032$, $b = 0{,}194$, $c = -0{,}723$ e $d = 4{,}386$.

Considerando o modelo de regressão cúbica $y = -0{,}032x^3 + 0{,}194x^2 - 0{,}723x + 4{,}386$ e substituindo na equação x por 6, obteve-se $y = 0{,}12$.

Arredondando às décimas, obtém-se $y = 0{,}1$.

Resposta: De acordo com o modelo escolhido prevê-se que ao fim de 6 horas a altura da água no reservatório seja 0,1 metros.

Grupo III

1.

1.1.

$V(t) = 999{,}9 \times 0{,}83^{t} \ (t \geq 0)$

Meio ano corresponde a 0,5

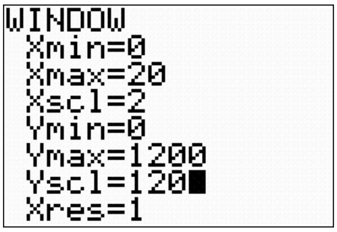
$V(0{,}5) = 999{,}9 \times 0{,}83^{0{,}5} \approx 910{,}95225$

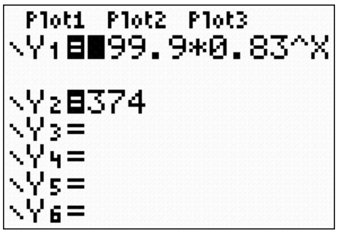
Resposta: Valor da bicicleta meio ano após ter sido comprada, 911 euros.

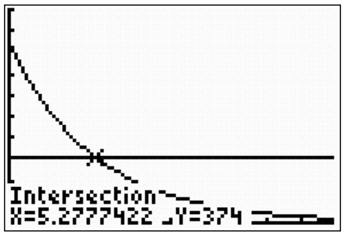
1.2.

$V(t) = 374$

O valor da abcissa do ponto de interseção da reta $y = 374$ com o gráfico de V corresponde ao tempo, após a compra, em que o valor da bicicleta é 374 euros.







$T \approx 5{,}2777422$

Resposta: Ao fim de 5,3 anos o valor da bicicleta é 374 euros.

1.3.

$V(3) = 999{,}9 \times 0{,}83^{3} \approx 571{,}72982$

$V(0) = 999{,}9 \times 0{,}83^{0} = 999{,}9$

$\dfrac{V(3) - V(0)}{3} \approx -142{,}7233929$

Arredondando às unidades, obtém-se $\dfrac{V(3) - V(0)}{3} = -143$.

O valor -143 indica que nos três primeiros anos, a bicicleta do Vicente desvaloriza, em média, 143 euros por ano.

2.

2.1.

$d(0)=30 \Leftrightarrow 20+a\cos(0)=30 \Leftrightarrow 20+a=30 \Leftrightarrow a=30-20 \Leftrightarrow a=10$

$d(0.15)=20 \Leftrightarrow 20+10\cos(0.15b)=20 \Leftrightarrow 10\cos(0.15b)=20-20 \Leftrightarrow 10\cos(0.15b)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos(0.15b)=0 \Leftrightarrow \cos(0.15b)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow 0{,}15b=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b=\frac{\pi}{0{,}3}+k\frac{\pi}{0{,}15}, k\in\mathbb{Z}$

Fazendo $k=0,\ b=\frac{\pi}{0{,}3}\approx 10{,}5\in[10{,}12]$.

Logo $a=10$ e $b=10{,}5$

2.2.

Se 0,3 e 0,6 são os zeros do gráfico da função T , significa que esses são os instantes onde a distância é mínima ou máxima do refletor ao solo.

Neste caso podemos afirmar que no instante $t=0{,}3$ o refletor estava à distância mínima do solo e no instante $t=0{,}6$ o refletor estava à distância máxima do solo.

Grupo IV

1.

1.1.

A área do triângulo $[ABC]$ é dada por: $A_{[ABC]}=\frac{\overline{BC}\times\overline{AB}}{2}$.

Assim,

$31=\frac{4\times\overline{AB}}{2} \Leftrightarrow 62=4\times\overline{AB} \Leftrightarrow \overline{AB}=\frac{62}{4} \Leftrightarrow \overline{AB}=15{,}5$

Usando conhecimentos de trigonometria, tem-se que:

$$\operatorname{tg}20^\circ\approx 0{,}3640$$

$\operatorname{tg}20^\circ=\frac{\overline{ED}}{\overline{AD}} \Leftrightarrow \operatorname{tg}20^\circ=\frac{6}{15{,}5+\overline{BD}} \Leftrightarrow 0{,}3640=\frac{6}{15{,}5+\overline{BD}} \Leftrightarrow 0{,}3640\times\left(15{,}5+\overline{BD}\right)=6 \Leftrightarrow$

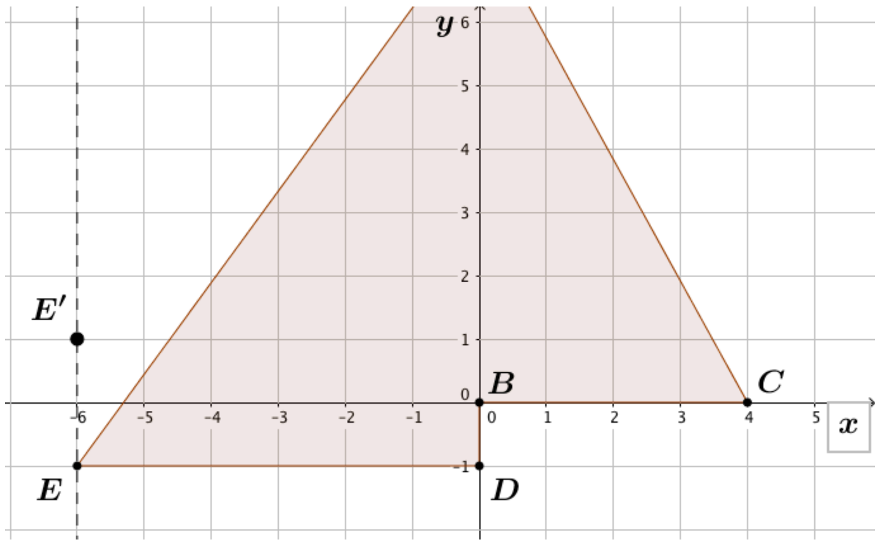
$\Leftrightarrow 5{,}642+0{,}3640\times\overline{BD}=6 \Leftrightarrow 0{,}3640\times\overline{BD}=6-5{,}642 \Leftrightarrow \overline{BD}=\frac{6-5{,}642}{0{,}3640} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{BD}\approx 0{,}98$

Concluímos que $\overline{BD}$ mede aproximadamente 0,98 metros.

1.2.

Representando as informações dadas num referencial cartesiano o. n. xOy, vem que:



Assim, como E tem de coordenadas $\left(-6,-1\right)$, então E' será dado por $\left(-6,1\right)$.

2.2.

2.1.

O número de milhas a navegar em cada um dos dias do mês de agosto é: 1; 1.5; 2; 2.5; ... isto é, o número de milhas constitui uma sucessão cujos termos se encontram em progressão aritmética, digamos $u(n)$, de razão $\frac{1}{2}$.

Sendo assim, o número total de milhas a navegar nos n primeiros dias é a soma dos n primeiros termos da progressão cujo termo geral é $u_n = 1 + \left(n-1\right) \times \frac{1}{2} \Leftrightarrow u_n = 1 + \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow u_n = \frac{n+1}{2}$.

Essa soma é dada por:

$$\frac{1+\frac{n+1}{2}}{2} \times n = \frac{\frac{2+n+1}{2}}{2} \times n = \frac{n+3}{4} \times n = \frac{n^2+3n}{4}$$ tal como se pretendia mostrar.

2.2.

Com recurso às funcionalidades da calculadora podemos construir a tabela correspondente ao total de milhas navegadas até ao dia n , inclusive. Esse total, como vimos em 2.1. é dado por $\frac{n^2+3n}{4}$.

Fazendo na calculadora $y=\frac{x^2+3x}{4}$ e obtendo a respetiva tabela da função temos:

Dias	**Total navegado**
1	1
2	2,5
3	4,5
4	7
5	10
6	13,5
…	…
17	85
18	94,5
19	**104,5**

Resposta: No dia 19 de agosto o número de milhas navegadas ultrapassa uma centena.

FIM