

**PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA A DO ENSINO  
SECUNDÁRIO**

**(CÓDIGO DA PROVA 635) – 2ª FASE – 24 DE JULHO 2023**

1.

Tem-se que:

$$\bullet \lim \left( 1 - \frac{2}{n} \right)^n = \lim \left( 1 + \frac{-2}{n} \right)^n = e^{-2}$$

$$\bullet \lim \left( -\frac{n^2+1}{n} \right) = \lim \left( -\frac{n^2}{n} - \frac{1}{n} \right) = \lim \left( -n - \frac{1}{n} \right) = -(+\infty) - \frac{1}{+\infty} = -\infty - 0 = -\infty$$

$$\bullet \lim \frac{4n+3}{3n+4} = \lim \frac{n \left( 4 + \frac{3}{n} \right)}{n \left( 3 + \frac{4}{n} \right)} = \lim \frac{\left( 4 + \frac{3}{n} \right)}{\left( 3 + \frac{4}{n} \right)} = \frac{4 + \frac{3}{+\infty}}{3 + \frac{4}{+\infty}} = \frac{4+0}{3+0} = \frac{4}{3}$$

$$\bullet \text{ se } n \text{ é par, então } \lim \frac{(-1)^n}{n} = \lim \frac{1}{n} = \frac{1}{+\infty} = 0 \text{ e se } n \text{ é ímpar, então } \lim \frac{(-1)^n}{n} = \lim \frac{-1}{n} = \frac{-1}{+\infty} = 0$$

$$\text{pelo que } \lim \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

**Resposta correta: (D)**

2.

Seja  $(u_n)$  a sucessão que traduz os perímetros dos triângulos equiláteros referidos no enunciado. Para obter cada triângulo, à exceção do primeiro, unem-se os pontos médios do triângulo anterior, pelo que o lado de cada triângulo é metade do anterior, e portanto, o perímetro de cada triângulo é metade do anterior, isto é:

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo concluímos que  $(u_n)$  é uma progressão geométrica de razão  $\frac{1}{2}$ .

Assim, como  $u_1 = \overline{3AB} = 3 \times 1$ , vem que a soma dos perímetros dos  $n$  primeiros triângulos da sequência é dada por:

$$S_n = u_1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} = 6 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

Como  $\left(\frac{1}{2}\right)^n > 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , vem que  $-\left(\frac{1}{2}\right)^n < 0 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n < 1 \Leftrightarrow 6 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) < 6$ , pelo que se conclui que para todo o  $n \in \mathbb{N}$  a soma dos perímetros dos  $n$  primeiros triângulos da sucessão é inferior a 6.

### 3.

Das seis posições possíveis escolhem-se duas para colocar os dois 5, sendo  ${}^6C_2$  o número de maneiras de o fazer.

Para as restantes quatro posições temos oito possibilidades para cada uma delas, qualquer um dos algarismos: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 e 9.

Logo, o total de números de cinco algarismos que se podem formar com os algarismos de 1 a 9, com exatamente dois cincos é  ${}^6C_2 \times 8^4 = 61440$ .

**Resposta correta: (B)**

### 4.

Dado que  $A$  e  $B$  são acontecimentos equiprováveis então,  $P(A) = P(B)$ .

Como  $P(\bar{A}) = 0,6$  temos que  $P(A) = 0,4 = P(B)$  e  $P(\bar{B}) = 0,6$ .

Assim,

$$\begin{aligned} P(A \cup \bar{B}) = 0,7 &\Leftrightarrow P(A) + P(\bar{B}) - P(A \cap \bar{B}) = 0,7 \Leftrightarrow 1 - P(A \cap \bar{B}) = 0,7 \Leftrightarrow P(A \cap \bar{B}) = 1 - 0,7 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow P(A \cap \bar{B}) = 0,3 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} P((A \cup \bar{B})|B) &= \frac{P((A \cup \bar{B}) \cap B)}{P(B)} = \frac{P((A \cap B) \cup (\bar{B} \cap B))}{P(B)} = \frac{P((A \cap B) \cup \emptyset)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \\ &= \frac{P(A) - P(A \cap \bar{B})}{P(B)} = \frac{0,4 - 0,3}{0,4} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

5.

Seja  $n$  o número de hexágonos, então:

- Número de vértices dos hexágonos:  $6n$
- Número de pontos:  $6n+1$  (inclui o ponto  $V$ )
- Número de casos possíveis:  ${}^{6n+1}C_2 = \frac{(6n+1) \times 6n}{2}$
- Número de casos favoráveis:  $n \times {}^6C_2 = n \times 15$

$$\frac{n \times {}^6C_2}{{}^{6n+1}C_2} = \frac{5}{49} \Leftrightarrow \frac{n \times 15}{\frac{(6n+1) \times 6n}{2}} = \frac{5}{49} \Leftrightarrow \frac{30}{(6n+1) \times 6} = \frac{5}{49} \Leftrightarrow \frac{5}{6n+1} = \frac{5}{49} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 6n+1 = 49 \Leftrightarrow 6n = 48 \Leftrightarrow n = 8$$

6.

$f(x) = a + e^{bx}$ ,  $(1, 5)$  e  $(2, 7)$  pertencem ao gráfico de  $f$ .

$$\begin{cases} a + e^b = 5 \\ a + e^{2b} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^b = 5 - a \\ (e^b)^2 = 7 - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^b = 5 - a \\ (5 - a)^2 = 7 - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^b = 5 - a \\ 25 - 10a + a^2 = 7 - a \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^b = 5 - a \\ a^2 - 9a + 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^b = 5 - a \\ a = 6 \end{cases} \vee \begin{cases} e^b = 5 - a \\ a = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^b = 5 - 6 \\ a = 6 \end{cases} \vee \begin{cases} e^b = 5 - 3 \\ a = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{cases} e^b = -1 \\ a = 6 \end{cases}}_{\text{impossível}} \vee \begin{cases} e^b = 2 \\ a = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \ln 2 \\ a = 3 \end{cases}$$

7.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(2x)}{2x} = 2 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(2x)}{2x}, \text{ (indeterminação do tipo } \frac{0}{0} \text{)}.$$

Fazendo a mudança de variável do tipo  $y = 2x$ , tem-se que  $x \rightarrow 0$  e  $y \rightarrow 0$ .

$$\text{Assim, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(2x)}{2x} = 2 \times \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(y)}{y}}_{\text{limite notável}} = 2 \times 1 = 2 \text{ e como tal, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(2x)}{2x} = 2$$

**Resposta correta: (D)**

## 8.

### 8.1

As coordenadas do ponto médio do segmento de reta  $[AG]$ , centro da superfície esférica pretendida,

$$\text{são: } \left( \frac{4+12}{2}, \frac{0+\frac{13}{2}}{2}, \frac{0+2}{2} \right) = \left( 8, \frac{13}{4}, 1 \right).$$

O raio da superfície esférica de diâmetro  $[AG]$  é dada pela distância do ponto médio do segmento de reta  $[AG]$  ao ponto  $A$ .

Assim:

$$r = \sqrt{(8-4)^2 + \left(\frac{13}{4}-0\right)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{17 + \frac{169}{16}} = \sqrt{\frac{441}{16}} = \frac{21}{4}$$

Logo, uma condição da superfície esférica de diâmetro  $[AG]$  pode ser:

$$(x-8)^2 + \left(y-\frac{13}{4}\right)^2 + (z-1)^2 = \frac{441}{16}$$

**Resposta correta: (A)**

### 8.2.

A reta  $EL$  é paralela a  $FG$  pois o prisma considerado é reto.

Assim sendo, a reta  $FG$  é dada, por exemplo, por:

$$(x, y, z) = \left( 12, \frac{13}{2}, 2 \right) + k(3, 4, 0), k \in \mathbb{R}$$

Pode-se assim concluir que o ponto  $F$  tem de coordenadas, para dado  $k \in \mathbb{R}$ ,

$$\left( 12 + 3k, \frac{13}{2} + 4k, 2 \right)$$

Como a reta  $AF$  é perpendicular à reta  $FG$ , tem-se que:  $\overrightarrow{AF} \cdot \vec{u} = 0$ , sendo  $\vec{u}(3, 4, 0)$  um vetor diretor da reta  $FG$ .

Além disso,  $\overrightarrow{AF}$  tem de coordenadas  $\left( 8 + 3k, \frac{13}{2} + 4k, 2 \right)$ .

Como tal,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AF} \cdot \vec{u} = 0 &\Leftrightarrow \left( 8 + 3k, \frac{13}{2} + 4k, 2 \right) \cdot (3, 4, 0) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 24 + 9k + 26 + 16k = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow k = -2 \end{aligned}$$

Assim sendo, as coordenadas do vértice  $F$  do prisma são:

$$\left( 12 + 3 \times (-2), \frac{13}{2} + 4 \times (-2), 2 \right) = \left( 6, -\frac{3}{2}, 2 \right).$$

9.

Da observação da figura concluímos que as coordenadas dos pontos  $C$ ,  $D$  e  $E$ , são, respetivamente,

$$C\left(0, \frac{\overline{OA}}{4}\right); \quad D\left(\frac{\overline{OA}}{3}, 0\right) \text{ e } E\left(\frac{2 \times \overline{OA}}{3}, \frac{\overline{OA}}{4}\right).$$

Determinemos agora os vetores:

$$\overrightarrow{DC} = C - D = \left(0, \frac{\overline{OA}}{4}\right) - \left(\frac{\overline{OA}}{3}, 0\right) = \left(-\frac{\overline{OA}}{3}, \frac{\overline{OA}}{4}\right)$$

$$\overrightarrow{DE} = E - D = \left(\frac{2 \times \overline{OA}}{3}, \frac{\overline{OA}}{4}\right) - \left(\frac{\overline{OA}}{3}, 0\right) = \left(\frac{\overline{OA}}{3}, \frac{\overline{OA}}{4}\right)$$

Como sabemos que:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DE} = -7 &\Leftrightarrow \left(-\frac{\overline{OA}}{3}, \frac{\overline{OA}}{4}\right) \cdot \left(\frac{\overline{OA}}{3}, \frac{\overline{OA}}{4}\right) = -7 \Leftrightarrow -\frac{\overline{OA}^2}{9} + \frac{\overline{OA}^2}{16} = -7 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -16 \times \overline{OA}^2 + 9 \times \overline{OA}^2 = -7 \times 16 \times 9 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -7 \times \overline{OA}^2 = -7 \times 16 \times 9 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \overline{OA}^2 = 16 \times 9 \end{aligned}$$

Como, por definição,  $A$  pertence ao semieixo positivo  $Ox$  então  $\overline{OA} > 0$  e, conseqüentemente,  $\overline{OA} = 4 \times 3 = 12$ .

10.

O referencial I não representa parte do gráfico da função  $g$  em  $]-\infty, 0[\setminus\{-1, 1\}$  porque, por  $g$  ser diferenciável, é contínua, logo verifica-se que  $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = g(0) < 0$  e no referencial I verifica-se que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = g(0) > 0, \text{ o que contradiz o enunciado.}$$

O referencial II não representa parte do gráfico da função  $g$  em  $]-\infty, 0[\setminus\{-1, 1\}$  porque, por definição,

$g'(x) < 0, \forall x \in ]-\infty, -1[$  e no referencial II a parte da função  $g$  aí representada é crescente no intervalo  $]-\infty, -1[$ , conseqüentemente,  $g'(x) > 0$ , o que contradiz o enunciado.

O referencial III não representa parte do gráfico da função  $g$  em  $]-\infty, 0[\setminus\{-1, 1\}$  porque sendo  $g$  uma função par e  $\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = +\infty$ , teria de se verificar que  $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = +\infty$ , e verifica-se que

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = -\infty, \text{ o que contradiz o enunciado.}$$

11.

Como o ponto  $A$  pertence ao semieixo imaginário positivo  $\arg(z_1) = \frac{\pi}{2}$ .

Como o triângulo  $[ABC]$  é equilátero, então:  $\arg(z_2) = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{6}$ .

Considerando  $|z_1| = |z_2| = r$ , temos que:

$$z_1^2 \times z_2 = \left( r e^{i\frac{\pi}{2}} \right)^2 \times \left( r e^{i\frac{7\pi}{6}} \right) = \left( r^2 e^{i\pi} \right) \times \left( r e^{i\frac{7\pi}{6}} \right) = r^3 e^{i\left(\pi + \frac{7\pi}{6}\right)} = r^3 e^{i\left(\frac{13\pi}{6}\right)} = r^3 e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$$

Como  $0 < \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$ , então o número complexo  $z_1^2 \times z_2$  pertence ao primeiro quadrante.

**Resposta correta: (A)**

12.

Como  $\operatorname{Re}(z) = -\operatorname{Im}(z)$  e o afixo de  $z$  pertence ao 4.º quadrante, então  $\arg(z) = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

Temos também que:

$$i^{11} = i^8 \times i^3 = (i^4)^2 \times i^3 = 1 \times (-i) = -i = e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

Considerando  $w = -1 - \sqrt{3}i$

$$|w| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = 2$$

Sendo  $\theta$  o argumento de  $w$  temos que:

$$\operatorname{tg}(\theta) = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3} \text{ e } \theta \text{ pertence ao 3.º quadrante, pelo que } \theta = \frac{4\pi}{3}.$$

$$\text{Assim, } z = \frac{2i^{11}e^{i\alpha}}{-1 - \sqrt{3}i} = \frac{2e^{i\frac{3\pi}{2}} \times e^{i\alpha}}{2e^{i\frac{4\pi}{3}}} = \frac{2e^{i\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}}{2e^{i\frac{4\pi}{3}}} = e^{i\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha - \frac{4\pi}{3}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)}.$$

Como  $\arg(z) = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , temos:

$$\frac{\pi}{6} + \alpha = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \wedge k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha = \frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \wedge k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha = \frac{19\pi}{12} + 2k\pi \wedge k \in \mathbb{Z}$$

e como  $\alpha \in [0, 2\pi[$ , então  $\alpha = \frac{19\pi}{12}$ .

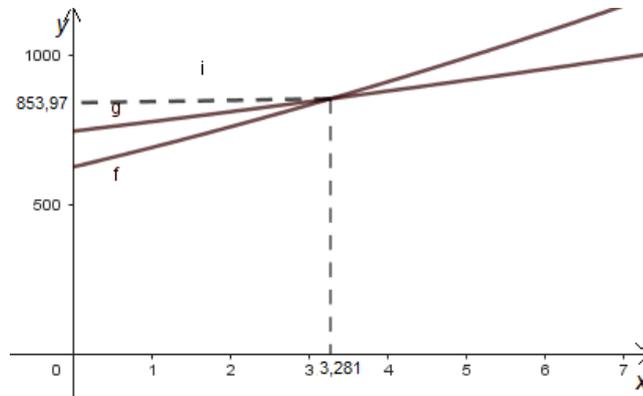
**13.**

A equação que permite resolver o problema é a seguinte (ou uma equivalente):

$$p(2j) = p(j) + 120.$$

Considerando  $f(x) = p(2x)$  e  $g(x) = p(x) + 120$ , determinamos as coordenadas do ponto de interseção dos gráficos das duas funções, com o auxílio da calculadora gráfica.

Assim, obtemos a seguinte representação gráfica:



De onde se verifica que a taxa de juro anual inicial é 3,281% .

**14.****14.1.**

Estudemos a existência de assíntotas verticais:

Como a função é contínua no seu domínio, pois resulta de operações elementares entre funções contínuas, e como o domínio é  $]0, +\infty[$ , a reta de equação  $x = 0$  é uma possível assíntota vertical ao gráfico de  $f$ .

Assim, vejamos se a função tem uma assíntota vertical quando  $x$  tende para 0 por valores superiores.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x + 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\ln x}{x} + \frac{2x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\ln x}{x} \right) + \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{2x}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\ln x}{x} \right) + 2 = \frac{-\infty}{0^+} + 2 = -\infty \end{aligned}$$

logo  $x = 0$  é uma equação da assíntota vertical ao gráfico de  $f$ .

Estudemos a existência de assíntotas horizontais:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln x}{x} + \frac{2x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln x}{x} \right) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x}{x} \right) = \\ &= \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln x}{x} \right)}_{\text{limite notável}} + 2 = 0 + 2 = 2 \end{aligned}$$

logo  $y = 2$  é uma equação da assíntota horizontal ao gráfico de  $f$ .

**14.2.**

Para estudar a função  $f$  quanto à monotonia e existência de extremos no intervalo  $]0, +\infty[$ , determinemos a expressão analítica da primeira derivada de  $f$  nesse intervalo:

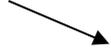
$$\left(\frac{\ln x + 2x}{x}\right)' = \frac{\left(\frac{1}{x} + 2\right) \times x - (\ln x + 2) \times 1}{x^2} = \frac{1 + 2x - \ln x - 2x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Determinemos, agora, os zeros da derivada no intervalo considerado.

Seja  $x \in ]0, +\infty[$ ,

$$\frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$$

Elaborando um quadro de sinal de  $f'$  e relacionando com a monotonia de  $f$ , vem

$x$	0		$e$	$+\infty$
$1 - \ln x$	n.d.	+	0	-
$x^2$	n.d.	+	+	+
Sinal $f'$	n.d.	+	0	-
Monotonia de $f$	n.d.		Máx.	

Conclusão:

- A função  $f$  é crescente em  $]0, e]$  e decrescente em  $[e, +\infty[$ .
- A função  $f$  tem um máximo relativo para  $x = e$ , que é  $f(e) = \frac{\ln e + 2e}{e} = \frac{1}{e} + 2$ .

**15.**

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AC} \times \overline{OB}}{2} = \frac{2\overline{OA} \times \overline{OB}}{2}, \text{ pois o triângulo } [ABC] \text{ é isósceles e } \overline{AB} = \overline{BC}.$$

A reta  $AB$  é tangente à circunferência de raio 2 e conseqüentemente perpendicular à reta  $OT$  no ponto  $T$ .

Considerando os triângulos retângulos  $[OAT]$  e  $[OBT]$  tem-se que:

$$\cos \alpha = \frac{2}{OA} \text{ e } \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{2}{OB}.$$

$$\text{Assim sendo, } \overline{OA} = \frac{2}{\cos \alpha} \text{ e } \overline{OB} = \frac{2}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{2}{\sin(\alpha)}.$$

Logo,

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{OA} \times \overline{OB}}{2} = \frac{2 \times \frac{2}{\cos \alpha} \times \frac{2}{\sin \alpha}}{2} = \frac{8 \times \frac{1}{\cos \alpha} \times \frac{1}{\sin \alpha}}{2} = \frac{8}{2 \cos \alpha \sin \alpha} = \frac{8}{\sin(2\alpha)}, \text{ c. q. d.}$$

16.

Como  $f(x) = \frac{k}{x}$  e  $g(x) = -\frac{k}{x}$  tem-se que  $f'(x) = -\frac{k}{x^2}$  e  $g'(x) = \frac{k}{x^2}$ .

Seja  $P$  um ponto do gráfico de  $f$  de abscissa  $a$  ( $a \in ]0, +\infty[$ ), isto é  $P\left(a, \frac{k}{a}\right)$  e  $Q$  o ponto do gráfico de  $g$  com a mesma abscissa de  $P$ , ou seja,  $Q\left(a, -\frac{k}{a}\right)$ .

A reta  $s$  é tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $P$ , logo:  $m_s = f'(a) = -\frac{k}{a^2}$

A reta  $s$  tem de equação reduzida  $y = -\frac{k}{a^2}x + b$ .

Como a reta  $s$  contém o ponto  $P$ , tem-se que:  $\frac{k}{a} = -\frac{k}{a^2} \times a + b \Leftrightarrow b = \frac{2k}{a}$ , isto é,

$$s: y = -\frac{k}{a^2}x + \frac{2k}{a}$$

Por processos análogos, conclui-se que  $t: y = \frac{k}{a^2}x - \frac{2k}{a}$ .

Calculando o ponto de interseção entre as retas  $s$  e  $t$ , tem-se que:

$$-\frac{k}{a^2}x + \frac{2k}{a} = \frac{k}{a^2}x - \frac{2k}{a} \Leftrightarrow \frac{4k}{a} = \frac{2k}{a^2} \Leftrightarrow x = 2a$$

Logo o ponto  $R$  tem de coordenadas  $\left(2a, \frac{k}{a^2} \times 2a - \frac{2k}{a}\right)$ , ou seja,  $R(2a, 0)$  e a área pretendida para

$a > 0$  e  $k > 0$ , é igual a:

$$A_{[PQR]} = \frac{\left| \frac{k}{a} - \left(-\frac{k}{a}\right) \right| \times |2a - a|}{2} = \frac{\frac{2k}{a} \times a}{2} = k, \text{ c. q. d.}$$

FIM