Associação de Professores de Matemática
Contactos:
Rua Dr. João Couto, n.º 27-A
1500-236 Lisboa
Tel.: +351 21 716 36 90 / 21 711 03 77
Fax: +351 21 716 64 24
http://www.apm.pt
email: geral@apm.pt

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA A DO ENSINO SECUNDÁRIO
(CÓDIGO DA PROVA 635) – 2ª FASE – 25 DE JULHO 2022

1.

A opção correta é a **C**, dado que $f(0) \leq f(x)$ para todo o $x \in D_f$.

Resposta correta: (C)

2.

A soma de todos os elementos de uma certa linha n do triângulo de Pascal é dada por 2^n, pelo que:

$$2^n = 16384 \underset{16384=2^{14}}{\Leftrightarrow} 2^n = 2^{14} \Leftrightarrow n = 14$$

Logo, a linha em questão é a 14, pelo que o quarto elemento da linha seguinte é ${}^{15}C_3 = 455$.

Resposta correta: (B)

3.

Sejam A e B os acontecimentos:

A:"passageiro que nunca tinha viajado de avião" e B:"passageiro que já tinha estado em Faro"

Sabemos que:

- $P(A) = 70\%$, ou seja, $P(A) = \frac{7}{10} \Leftrightarrow P(\bar{A}) = \frac{3}{10}$
- $P(B) = \frac{2}{5} \Leftrightarrow P(\bar{B}) = \frac{3}{5}$
- $P(\bar{A}|B) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{2} \underset{P(B)=\frac{2}{5}}{\Leftrightarrow} P(\bar{A} \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} \Leftrightarrow P(\bar{A} \cap B) = \frac{1}{5}$

	A	$\bar{A}$	
B	$\frac{2}{5} - \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
$\bar{B}$	$\frac{7}{10} - \frac{1}{5} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$
	$\frac{7}{10}$	$\frac{3}{10}$	1

Logo, $P(A|\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{6}$.

4.

O número de casos possíveis é ${}^{12}C_3 \times {}^{9}C_2 \times {}^{7}C_3 \times {}^{4}C_4$ (escolhem-se três das doze posições para os cartões azuis, ${}^{12}C_3$; das restantes nove posições, escolhem-se duas para os cartões brancos, ${}^{9}C_2$; das restantes sete posições, escolhem-se três para os cartões pretos, ${}^{7}C_3$; as quatro posições que sobram ficam para os cartões vermelhos, ${}^{4}C_4$)

O número de casos possíveis é $10 \times {}^{9}C_2 \times {}^{7}C_3 \times {}^{4}C_4$ (os cartões azuis podem ser colocados de dez maneiras distintas: os três da posição 1 à 3, ou da 2 à 4, ou da 3 à 5, ou ... da 10 à 12; em seguida, das restantes nove posições, escolhem-se duas para os cartões brancos, ${}^{9}C_2$; das restantes sete posições, escolhem-se três para os cartões pretos, ${}^{7}C_3$; as quatro posições que sobram ficam para os cartões vermelhos, ${}^{4}C_4$).

Portanto, a probabilidade pedida é: $\dfrac{10 \times {}^{9}C_2 \times {}^{7}C_3 \times {}^{4}C_4}{{}^{12}C_3 \times {}^{9}C_2 \times {}^{7}C_3 \times {}^{4}C_4} = \dfrac{10}{{}^{12}C_3} = \dfrac{10}{220} = \dfrac{1}{22}$.

5.

5.1.

Uma vez que $[ABCDEFGH]$ é um cubo, tem-se que $[AB]$ e $[EH]$ são arestas do cubo perpendiculares, logo $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HE} = 0$.

Resposta correta: (**B**)

5.2.

Como o vértice E do cubo pertence à reta definida pela equação $(x, y, z) = (0, 0, 3) + k(1, -1, -1), k \in \mathbb{R}$, então as coordenadas do ponto E são da forma $(k, -k, 3-k)$ com $k \in \mathbb{R}$.

Uma vez que $[AB]$ e $[AE]$ são perpendiculares, tem-se que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = 0$.

Como $\overrightarrow{AB} = B - A = (3, -6, 2)$ e $\overrightarrow{AE} = E - A = (k+2, -k-5, 3-k)$ obtemos:

$$3 \times (k+2) - 6 \times (-k-5) + 2 \times (3-k) = 0 \Leftrightarrow 3k + 6 + 6k + 30 + 6 - 2k = 0 \Leftrightarrow 7k = -42 \Leftrightarrow k = -6$$

Substituindo em $(k, -k, 3-k)$ conclui-se que o ponto E tem de coordenadas $(-6, 6, 9)$.

6.

Consideremos $z = x + yi$.

Temos que $\bar{z} = x - yi$ e $z \times \bar{z} = 4$, então

$$z \times \bar{z} = 4 \Leftrightarrow (x + yi)(x - yi) = 4 \Leftrightarrow x^2 - y^2 i^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$$

Logo, conclui-se que é uma circunferência de centro (0, 0) e raio 2.

Resposta correta: (A)

7.

Tem-se que:

$$z = \frac{4}{1-i} + 4i^{18} \Leftrightarrow z = \frac{4(1+i)}{1-i^2} + 4i^2 \Leftrightarrow z = \frac{4(1+i)}{2} - 4 \Leftrightarrow z = -2 + 2i$$

$|z| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} \Leftrightarrow |z| = 2\sqrt{2}$

Sendo θ um argumento de z tem-se que $tg\ \theta = \frac{2}{-2} = -1$ e como θ está no 2.º quadrante, então $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

Assim, $z = 2\sqrt{2}.e^{i\frac{3\pi}{4}}$ é uma das raízes cúbicas de um número complexo w.

As restantes raízes cúbicas de um número complexo w são dadas por $z.e^{i\frac{2\pi k}{3}}, k \in \{1, 2\}$.

Para $k = 1$, obtém-se $2\sqrt{2}.e^{i\frac{3\pi}{4}}.e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2\sqrt{2}.e^{i\frac{17\pi}{12}}$

Para $k = 2$, obtém-se $2\sqrt{2}.e^{i\frac{3\pi}{4}}.e^{i\frac{4\pi}{3}} = 2\sqrt{2}.e^{i\frac{25\pi}{12}} = 2\sqrt{2}.e^{i\frac{\pi}{12}}$.

Conclui-se que as restantes raízes cúbicas de w são $2\sqrt{2}.e^{i\frac{17\pi}{12}}$ e $2\sqrt{2}.e^{i\frac{\pi}{12}}$.

8.

A função f é contínua em $x = 0$ se e só se $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$.

Assim, temos:

- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \ln\left(\sqrt{e+x}\right) = \ln\left(\sqrt{e+0}\right) = \ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}$

- $f(0) = \ln\left(\sqrt{e+0}\right) = \ln e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

- $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1-\cos x}{x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\overbrace{(1-\cos x)(1+\cos x)}^{1-\cos^2 x = sen^2 x}}{x(1+\cos x)} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{sen^2 x}{x(1+\cos x)} =$

$$= \underbrace{\lim_{x \to 0^-} \frac{senx}{x}}_{limite\ notável} \times \lim_{x \to 0^-} \frac{senx}{1+\cos x} = 1 \times \frac{sen(0)}{1+\cos(0)} = 1 \times \frac{0}{1+1} = 1 \times 0 = 0$$

Como $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$, então conclui-se que a função f é não contínua em $x = 0$.

9.

9.1

Para estudar o sentido das concavidades no intervalo $]0,\pi[$. Portanto só nos interessa o ramo da função $g'(x) = x + 2\cos^2(x)$.

Calculemos, pois, a segunda derivada da função g:

$$g''(x) = 1 + 4\cos x\,(-\sin x) \Leftrightarrow g''(x) = 1 - 2\sin(2x)$$

Procuremos os zeros da segunda derivada:

$g''(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\sin(2x) = 0 \Leftrightarrow 2\sin(2x) = 1 \Leftrightarrow \sin(2x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(2x) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$, como $x \in\ ]0,\pi[$, então $2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee 2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Obtém-se as soluções: $x = \frac{\pi}{12} \vee x = \frac{5\pi}{12}$

Recorrendo à circunferência trigonométrica podemos construir a tabela:

	0		$\frac{\pi}{12}$		$\frac{5\pi}{12}$		π
$g''(x)$	n. d.	$+$		$-$		$+$	n. d.
$g(x)$	n. d.	$\cup$		$\cap$		$\cup$	n. d.

Concluímos, pela análise da tabela que o gráfico de g tem concavidade voltada para cima em $\left]0,\frac{\pi}{12}\right]$ e em $\left[\frac{5\pi}{12},\pi\right[$. E tem concavidade voltada para baixo em $\left[\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}\right]$.

As abcissas dos pontos de inflexão são: $\frac{\pi}{12}$ e $\frac{5\pi}{12}$.

9.2.

A reta tangente ao gráfico da função que é paralela à reta de equação $y = -2x$, terá declive igual a -2.

Portanto, resolvendo a equação $g'(x) = -2$. Assim,

$g'(x) = -2 \Leftrightarrow 3e^{2x} - 7e^x = -2 \Leftrightarrow 3(e^x)^2 - 7e^x + 2 = 0$, considerando $e^x = y$, vamos obter a equação do segundo grau: $3y^2 - 7y + 2 = 0$. Resolvendo esta equação, obtemos

$$3y^2 - 7y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{6} \Leftrightarrow y = \frac{7 \pm 5}{6} \Leftrightarrow y = 2 \vee y = \frac{1}{3}$$

Temos então que $e^x = 2 \vee e^x = \frac{1}{3}$, de onde vem que

$$x = \ln 2 \vee x = \ln\frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \ln 2 \vee x = \ln 3^{-1} \Leftrightarrow x = \ln 2 \vee x = -\ln 3$$

A abcissa que pertencente ao intervalo $]-\infty,0[$ é $-\ln 3$.

10.

Pretendemos determinar as assíntotas paralelas aos eixos coordenados.

Comecemos pelas assíntotas verticais:

$\lim\limits_{x\to0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{e^x+\ln x}{e^x-1} = \frac{1+(-\infty)}{0^+} = -\infty$. Assim, a reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical do gráfico de h.

Não existe mais nenhuma assíntota vertical pois a função no seu domínio resulta da soma e do quociente de funções continuas.

Quanto a assíntotas horizontais temos:

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+\ln x}{e^x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x\left(1+\frac{\ln x}{e^x}\right)}{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)} = \frac{1+\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}\right)}}{1-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}} = \frac{1+\frac{0}{+\infty}}{1-0} = 1$$

Concluímos que a reta de equação $y = 1$ é assíntota horizontal do gráfico de h.

11.

11.1.

Como $m(0)=\frac{30(1+0{,}006\times0)^3-29}{(1+0{,}006\times0)^3}=1$ e $m(1)=\frac{30(1+0{,}006\times1)^3-29}{(1+0{,}006\times1)^3}\approx1{,}52489$, então temos que $m(0)-m(1)\approx1{,}52489$, logo o aumento é de aproximadamente 52%.

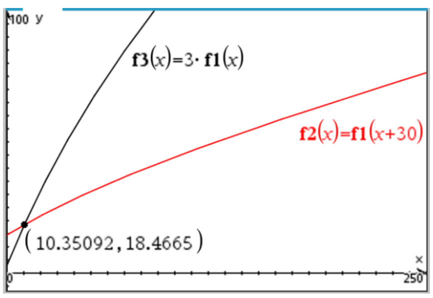
Resposta correta: (**B**)

11.2.

Seja t um instante a partir do qual, passado meia hora $(t+30)$, a massa de sal triplica: $3m(t)$.

Assim, a equação que traduz o problema é $m(t+30)=3m(t)$.

Recorrendo à calculadora gráfica e $f_1(x)=\frac{30(1+0{,}006\times x)^3-29}{(1+0{,}006\times x)^3}$ e introduzindo as expressões $f_2(x)=f_1(x+30)$ e $f_3(x)=3f_1(x)$, obtemos a representação ao lado.



De onde se verifica que o ponto de intersecção tem coordenadas (10,35; 18,47).

Sendo $t\approx10{,}35\ min$, então $0{,}35\times60\approx21$.

O instante a partir do qual, passado meia hora, a massa de sal no tanque triplica é aos 10 minutos e 21 segundos.

12.

Tem-se que $u_1=(-1)^1=-1$, $u_2=(-1)^2=1$ e $u_3=(-1)^3=-1$

Para todo o $n\geq 4$, tem-se que:

$$u_n=\frac{4n-1}{n+3}=\frac{4n+12-12-1}{n+3}=\frac{4n+12-13}{n+3}=\frac{4(n+3)-13}{n+3}=\frac{4\cancel{(n+3)}}{\cancel{n+3}}-\frac{13}{n+3}=4-\frac{13}{n+3}$$

Assim, para todo o $n\geq 4$, tem-se que, $0<\frac{13}{n+3}\leq\frac{13}{7}$, pelo que:

$$-\frac{13}{7}\leq-\frac{13}{n+3}<0\Leftrightarrow-\frac{13}{7}+4\leq 4-\frac{13}{n+3}<0+4\Leftrightarrow\frac{15}{7}\leq 4-\frac{13}{n+3}<4$$

Logo, para todo o $n\in\mathbb{N}$, tem-se que $-1\leq u_n<4$, pelo que (u_n) é limitada.

13.

Para estudar a monotonia da função f, determinamos a função derivada f':

$$f'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3+ax^2+a^2x+\sqrt{2}\right)'=x^2+2ax+a^2$$

Determinando os zeros da função derivada:

$$x^2+2ax+a^2=0\Leftrightarrow x=\frac{-2a\pm\sqrt{4a^2-4a^2}}{2}\Leftrightarrow x=-a$$

Construindo um quadro de sinal da função derivada f' e da monotonia da função f temos:

x	$-\infty$	$-a$	$+\infty$
f'	+	0	+
f	$\nearrow$		

Logo, a função f é crescente em todo o seu domínio, $\mathbb{R}$, pelo que não tem extremos.

14.

Sabendo que a reta r é definida pela equação $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + 1$, determinemos a abcissa do ponto A.

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Logo, a base do triângulo é $\overline{OA} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Sabendo que $cos\ \alpha = \frac{1}{2}$, temos que $\alpha = 60°$ e $tg\ \alpha = \sqrt{3}$.

Assim, uma equação da reta s é: $y = \sqrt{3}x$.

Determinando as coordenadas do ponto B, ponto de interseção das duas retas

$$\begin{cases} y = \sqrt{3}x \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{3}x \\ \sqrt{3}x = \frac{\sqrt{3}}{2}x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{3}x \\ 2\sqrt{3}x = \sqrt{3}x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{3}x \\ \sqrt{3}x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{3}x \\ x = \frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{3} \times \frac{2}{\sqrt{3}} \\ x = \frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = \frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

obtemos as coordenadas do ponto $B\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, 2\right)$, pelo que a altura do triângulo $[OAB]$ é igual 2.

Logo, a área de $[OAB]$ é dada por: $Área\ de\ [OAB] = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} \times 2}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

15.

A reta r é definida por uma equação do tipo $y = mx + 1$, sendo m o declive dessa reta, na medida em que a ordenada na origem é igual a 1.

Determinando as coordenadas dos pontos de interseção da reta r, com a função f, definida por: $f(x) = x^2$, temos:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = mx + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x^2 = mx + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x^2 - mx - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x = \frac{m \pm \sqrt{m^2 + 4}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \left(\frac{m + \sqrt{m^2 + 4}}{2}\right)^2 \\ x = \frac{m + \sqrt{m^2 + 4}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} y = \left(\frac{m - \sqrt{m^2 + 4}}{2}\right)^2 \\ x = \frac{m - \sqrt{m^2 + 4}}{2} \end{cases}$$

Assim, os vetores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ terão de coordenadas:

$$\left(\frac{m+\sqrt{m^2+4}}{2}, \left(\frac{m+\sqrt{m^2+4}}{2}\right)^2\right) \quad \text{e} \quad \left(\frac{m-\sqrt{m^2+4}}{2}, \left(\frac{m-\sqrt{m^2+4}}{2}\right)^2\right)$$

Calculando,

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{m + \sqrt{m^2 + 4}}{2} \times \frac{m - \sqrt{m^2 + 4}}{2} + \left(\frac{m + \sqrt{m^2 + 4}}{2}\right)^2 \times \left(\frac{m - \sqrt{m^2 + 4}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{m^2 - m^2 - 4}{4} + \left(\frac{m^2 - m^2 - 4}{4}\right)^2 = -1 + (-1)^2 = 0$$

temos que, o produto escalar é igual a 0, pelo que o ângulo convexo AOB é um ângulo reto, como queríamos demonstrar.

FIM