Proposta de resolução

1.1. Para determinar a amplitude do ângulo VAC vamos determinar os vetores $\overrightarrow{AV}$ e $\overrightarrow{AC}$.
$\overrightarrow{AV} = V - A = (3,-1,2) - (2,1,0) = (1,-2,2)$.
$\overrightarrow{AC} = C - A = (0,-1,2) - (2,1,0) = (-2,-2,2)$.

$$\begin{aligned}
&\cos\left(\overrightarrow{AV}\hat{}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\overrightarrow{AV}\cdot\overrightarrow{AC}}{||\overrightarrow{AV}||\times||\overrightarrow{AC}||}\\
\Leftrightarrow\ &\cos\left(\overrightarrow{AV}\hat{}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{(1,-2,2)\cdot(-2,-2,2)}{||(1,-2,2)||\times||(-2,-2,2)||}\\
\Leftrightarrow\ &\cos\left(\overrightarrow{AV}\hat{}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{-2+4+4}{\sqrt{1+4+4}\times\sqrt{4+4+4}}\\
\Leftrightarrow\ &\cos\left(\overrightarrow{AV}\hat{}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{6}{3\sqrt{12}}\\
\Leftrightarrow\ &\overrightarrow{AV}\hat{}\overrightarrow{AC} \approx 55^\circ.
\end{aligned}$$

1.2. Para determinar uma equação do plano que contém a base da pirâmide, vamos começar por determinar um vetor normal ao plano.
Seja M o ponto médio do segmento de reta $[AC]$. Então

$$M = \left(\frac{2+0}{2}, \frac{1-1}{2}, \frac{0+2}{2}\right) = (1,0,1).$$

Como $\overrightarrow{MV}$ é um vetor normal ao plano ABC e

$$\overrightarrow{MV} = V - M = (3,-1,2) - (1,0,1) = (2,-1,1),$$

a sua equação cartesiana é da forma

$$2x - y + z + d = 0,$$

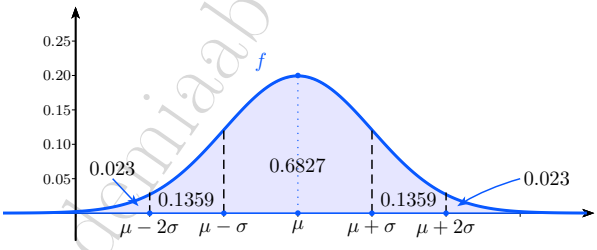
onde $d \in \mathbb{R}$.
Substituindo $A(2,1,0)$ na equação temos

$$2\times 2 - 1 + 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -3$$

e podemos concluir que $2x-y+z-3=0$ é uma equação do plano pretendido.

2.1. Sabemos que se $X \sim N(\mu,\sigma)$ então:
$P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma) \approx 0.6827$
$P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma) \approx 0.9545$
$P(\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma) \approx 0.9973$

Consideremos o gráfico seguinte, que ilustra parte destas propriedades.



Deste modo, como $X \sim N(5,0.5)$, então
$P(X > \mu+2\sigma) = P(X>6) \approx 0.023$.
A opção correta é a **(C)**.

2.2. Vamos fazer uso do facto de $\lim\left(1+\frac{k}{n}\right)^n = e^k$.
$\lim\left(\frac{n-2}{n}\right)^{3n} = \left(\lim\left(1+\frac{-2}{n}\right)^n\right)^3 = \left(e^{-2}\right)^3 = e^{-6} = \frac{1}{e^6}$.
A opção correta é a **(C)**.

3.1. Consideremos, relativamente à experiência de escolha aleatória de escolha de uma bola, os acontecimentos:
A: "a bola é amarela";
L: "a bola ter o logotipo desenhado".
Dos dados do enunciado podemos concluir que $P\left(\overline{A}\cup\overline{L}\right) = \frac{15}{16}$. Deste modo,

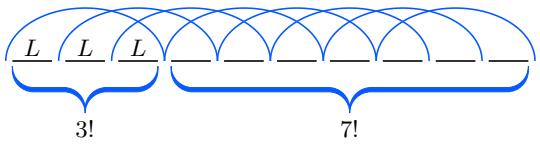
$$\begin{aligned}
&P\left(\overline{A}\cup\overline{L}\right) = \frac{15}{16}\\
\Leftrightarrow\ &P\left(\overline{A\cap L}\right) = \frac{15}{16}\\
\Leftrightarrow\ &1 - P(A\cap L) = \frac{15}{16}\\
\Leftrightarrow\ &P(A\cap L) = \frac{1}{16}.
\end{aligned}$$

Como as bolas são indistinguíveis ao tato e são selecionadas ao acaso, a Lei de Laplace garante que

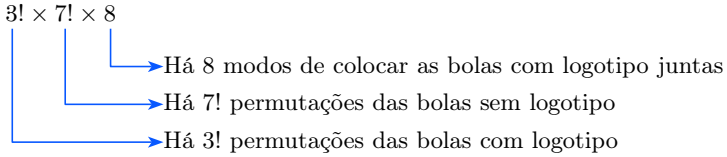
$$\begin{aligned}
&P(A\cap L) = \frac{1}{16}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{\#(A\cap L)}{\#E} = \frac{1}{16}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{3}{\#E} = \frac{1}{16}\\
\Leftrightarrow\ &\#E = 48.
\end{aligned}$$

Podemos concluir que a caixa contém 48 bolas.

3.2. Vamos determinar a probabilidade pedida recorrendo à Lei de Laplace.
Para determinar os casos favoráveis vamos recorrer ao esquema seguinte e ao Princípio fundamental da contagem.



Relativamente aos casos favoráveis temos:



Uma vez que os casos possíveis são 10!, correspondentes às permutações das 10 bolas, a probabilidade pedida é

$$\frac{3!\times 7!\times 8}{10!} = \frac{1}{15}.$$

A opção correta é a **(B)**.

4. Comecemos por notar que, para os números serem:

www.academiaaberta.pt Rui Paiva

- ímpares, o último algarismo deve ser 5 ou 7;
- superiores a seis milhões, o primeiro algarismo deve ser 6 ou 7.

A divisão das diferentes situações em três casos e a respetiva esquematização clarificam a resolução do problema.
Caso 1: o primeiro algarismo é 6 e o último 5:
O esquema seguinte exemplifica a situação.

6	5	6	7	6	6	5

Como nos algarismos que não estão nos extremos há três algarismos iguais a 6 então há $\frac{5!}{3!}$ números nestas condições.

Caso 2: o primeiro algarismo é 6 e o último 7:
O esquema seguinte exemplifica a situação.

6	5	6	5	6	6	7

Como nos algarismos que não estão nos extremos há três algarismos iguais a 6 e dois iguais a 5 então há $\frac{5!}{2!3!}$ números nestas condições.

Caso 3: o primeiro algarismo é 7 e o último 5:
O esquema seguinte exemplifica a situação.

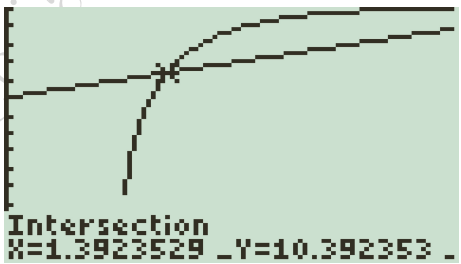
7	5	6	6	6	6	5

Como nos algarismos que não estão nos extremos há quatro algarismos iguais a 6 então, apenas a troca da posição do 5 origina números diferentes. Há 5 números nestas condições.
No total temos $\frac{5!}{3!}+\frac{5!}{2!3!}+5=35$ números.

5. O problema pode ser equacionado com $d=x+9$.
Como $r_1=7$ e $r_2=8$ temos

$$\begin{aligned} & d=x+9 \\ \Leftrightarrow & \frac{\sqrt{\left[(7+8)^2-x^2\right]\left[x^2-(7-8)^2\right]}}{x}=x+9 \\ \Leftrightarrow & \frac{\sqrt{(225-x^2)(x^2-1)}}{x}=x+9 \end{aligned}$$

e $\left]r_2-r_1,\sqrt{r_2^2-r_1^2}\right[=\left]1,\sqrt{15}\right[$.
Introduzindo na calculadora gráfica as expressões $y=\frac{\sqrt{(225-x^2)(x^2-1)}}{x}$ e $y=x+9$ e recorrendo às suas potencialidades, obtemos os gráficos seguintes e o seu ponto de interseção no intervalo $\left]1,\sqrt{15}\right[$.



Podemos concluir que $x\approx 1.4$.

6. $\overline{z}=-1-2i$.
Sendo $\theta\in[0,2\pi[$, como o afixo de $\overline{z}$ pertence ao 3.º quadrante,

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{-2}{-1}\Leftrightarrow\theta=\operatorname{tg}^{-1}(2)+\pi\Leftrightarrow\theta\approx 4.25\in\left]\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right[.$$

A opção correta é a **(D)**.

7. Como $r>1$ e $a_n>0,\forall n\in\mathbb{N}$, a sucessão (a_n) é monótona crescente.
Sejam a_p e a_{p+1} dois termos consecutivos da sucessão.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} a_p+a_{p+1}=12 \\ a_{p+1}-a_p=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_p+r\times a_p=12 \\ r\times a_p-a_p=3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} a_p=\frac{12}{1+r} \\ a_p(r-1)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} --- \\ \frac{12r-12-3-3r}{1+r}=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} --- \\ 9r-15=0\wedge r\neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_p=\frac{9}{2} \\ r=\frac{5}{3}. \end{cases} \end{aligned}$$

Podemos concluir que a razão é igual a $\frac{5}{3}$.

8.

$$\begin{aligned} & \ln\left(a^2-b^2\right)-2\ln(a+b)=\ln(a-b)+\ln(a+b)-2\ln(a+b) \\ = & \ln(a-b)-\ln(a+b)=\ln(a-b)-\ln(2(a-b)) \\ = & \ln(a-b)-[\ln 2+\ln(a-b)]=-\ln 2\approx -0.7. \end{aligned}$$

Podemos concluir que a opção correta é a **(C)**.

9.1. Note-se que $\vec{n}_\alpha(1,1,1)$ e $\vec{n}_\beta(2,2,2)$ são vetores normais aos planos α e β, respetivamente. Como $\vec{n}_\beta=2\vec{n}_\alpha$, os planos α e β são paralelos. Por outro lado,

$$x+y+z=1\Leftrightarrow 2x+2y+2z=2\not\Leftrightarrow 2x+2y+2z=1$$

permite-nos concluir que os planos α e β são estritamente paralelos. Consequentemente, a interseção dos três planos é o conjunto vazio.
Um outro modo de concluir o pretendido é através da resolução do sistema seguinte:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y+2z=1 \\ x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y+2z=2 \\ 2x+2y+2z=1 \\ --- \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 1=2 \\ --- \\ --- \end{cases} \end{aligned}$$

Como o sistema é impossível, a interseção dos três planos é o conjunto vazio.
Podemos concluir que a opção correta é a **(A)**.

9.2. Como a área do círculo é 9π,

$$\pi\times\overline{OF_2}^2=9\pi\Leftrightarrow\overline{OF_2}=\pm 3.$$

Consequentemente, o diâmetro do círculo é igual a 6.
Como a distância focal, $2c$, e o eixo menor da elipse, $2b$, são iguais ao diâmetro do círculo então

$$2c=2b=6\Leftrightarrow c=b=3.$$

Uma vez que $b^2+c^2=a^2$ então

$$3^2+3^2=a^2\Leftrightarrow a^2=18.$$

www.academiaberta.pt Rui Paiva

Assim, a equação reduzida da elipse é

$$\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1.$$

A opção correta é a **(A)**.

10.

$$\begin{aligned} w &= \frac{z_1+i^6+2\overline{z_1}}{z_1-z_2} \\ &= \frac{3+4i-1+6-8i}{-1-2i} \\ &= \frac{8-4i}{-1-2i} \\ &= \frac{(8-4i)(-1+2i)}{(-1-2i)(-1+2i)} \\ &= \frac{20i}{5}=4i. \end{aligned}$$

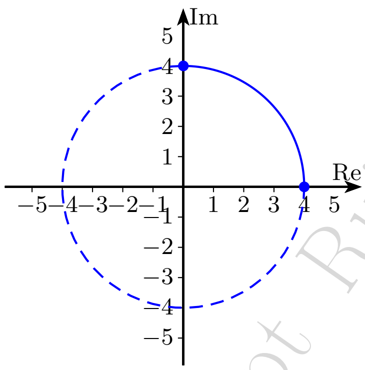
Assim,

- $|z|=|w| \Leftrightarrow |z|=4$ representa, no plano de Argand, a circunferência centrada na origem com raio 4;
- $\text{Im}(z)\geq 0$ representa os complexos cujo afixo se encontra no eixo real ou acima deste;
- $\text{Re}(z)\geq 0$ representa os complexos cujo afixo se encontra no eixo imaginário ou à direita deste.

Na figura seguinte está representada no plano de Argand a região definida pela condição

$$|z|=|w| \wedge \text{Im}(z)\geq 0 \wedge \text{Re}(z)\geq 0.$$

Trata-se de um arco de circunferência.



Como o perímetro da circunferência completa é $2\pi\times 4=8\pi$, o perímetro do arco de circunferência é $\frac{8\pi}{4}=2\pi$ unidades de comprimento.

11. $2\cos x+1=0 \Leftrightarrow \cos x=-\frac{1}{2}$.
Como $-\frac{2\pi}{3}\in[-\pi,0]$ e $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$ então a opção correta é a **(B)**.

12.1. Consideramos a seguinte tabela de dupla entrada com todas as somas possíveis.

1.º\2.º	−1	1	1	1	1	1
−1	−2	0	0	0	0	0
1	0	2	2	2	2	2
1	0	2	2	2	2	2
1	0	2	2	2	2	2
1	0	2	2	2	2	2
1	0	2	2	2	2	2

Comecemos por notar que $S_X=\{0,-2,2\}$.
Como $P(X=0)=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$, $P(X=-2)=\frac{1}{36}$ e $P(X=2)=\frac{25}{36}$, então $k=0$ e podemos concluir que a opção correta é a **(A)**.

12.2. O período de um oscilador harmónico definido por $x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$, onde $A>0$, $\omega>0$ e $\phi\in[0,2\pi[$, é dado por $P=\frac{2\pi}{\omega}$. Como $\frac{2\pi}{\pi}=2$, o período é 2.
Podemos concluir que a opção correta é a **(A)**.

13.1. Se $x>0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1(x-\ln x)-x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{(1-\ln x)^2} \\ &= \frac{x-\ln x-x+1}{(1-\ln x)^2} \\ &= \frac{1-\ln x}{(1-\ln x)^2}. \end{aligned}$$

Assim, $f'(1)=\frac{1-\ln 1}{(1-\ln 1)^2}=1$ e a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1 é da forma $y=x+b$, $b\in\mathbb{R}$.
Como $f(1)=\frac{1}{1-\ln 1}=1$ então $T(1,1)$ é um ponto da reta tangente em estudo.
Substituindo as coordenadas de T na equação $y=x+b$ temos

$$1=1+b\Leftrightarrow b=0.$$

Podemos concluir que $y=x$ é a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.

13.2. Para f ser contínua, tem que se verificar:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0).$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-}\frac{1-\cos x}{x} \\ &\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0^-}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)} \\ &= \lim_{x\to 0^-}\frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} \\ &= \lim_{x\to 0^-}\frac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)} \\ &= \lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}\times\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{1+\cos x} \\ &= 1\times\frac{0}{1+1}=0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x-\ln x} \\ &= \frac{0}{0-\ln 0^+}=\frac{0}{0-(-\infty)}=0. \end{aligned}$$

Como $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=0$ então f é contínua no ponto 0.

14.1. $D_g=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
Para estudar a monotonia e a existência de extremos

www.academiaaberta.pt Rui Paiva

da função g vamos começar por determinar a derivada e os seus zeros. $g'(x) = \frac{-e^{-x}\times x - e^{-x}\times 1}{x^2} = \frac{e^{-x}(-x-1)}{x^2}$.

$$\begin{aligned} & g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x}(-x-1) = 0 \wedge x^2 \neq 0 \\ \Leftrightarrow & \left(e^{-x} = 0 \vee -x - 1 = 0\right) \wedge x \neq 0 \\ \Leftrightarrow & x = -1. \end{aligned}$$

Na tabela seguinte é apresentado o estudo do sinal de g' e da monotonia de g.

x	$-\infty$		-1		0	$+\infty$
e^{-x}	$+$		$+$	$+$	$+$	$+$
$-x-1$	$+$		0	$-$	$-$	$-$
x^2	$+$		$+$	$+$	0	$+$
$g'(x)$	$+$		0	$-$	ND	$-$
g	$\nearrow$			$\searrow$		$\searrow$

Podemos concluir que g é crescente em $]-\infty, -1]$ e decrescente em $[-1, 0[$ e em $]0, +\infty[$.
$g(-1) = \frac{e}{-1} = -e$ é máximo relativo.

14.2. O declive da assíntota oblíqua é dado por

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x}.$$

Como $h(x) = g(x) + 2x - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{e^{-x}}{x} + 2x - \frac{1}{\sqrt{x}}$,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^{-x}}{x^2} + 2 - \frac{1}{x\sqrt{x}}\right) \\ &= \frac{0}{+\infty} + 2 - \frac{1}{+\infty} = 2. \end{aligned}$$

Podemos concluir que a opção correta é a **(B)**.

15. Seja α a inclinação da reta OB. Como o seu declive é $\frac{4}{3}$ então $\tan\alpha = \frac{4}{3}$.
A inclinação da reta r é $\frac{\alpha}{2}$ e o seu declive $\tan\frac{\alpha}{2}$.
Como $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1-\tan a \tan b}$ então
$\tan(2a) = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$.
Assim, $\tan\alpha = \tan\left(2\times\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$.
Se $1 - \tan^2\frac{\alpha}{2} \neq 0$ temos

$$\begin{aligned} & \tan\alpha = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{4}{3} \\ \Leftrightarrow & 6\tan\frac{\alpha}{2} = 4 - 4\tan^2\frac{\alpha}{2} \\ \Leftrightarrow & 4\tan^2\frac{\alpha}{2} + 6\tan\frac{\alpha}{2} - 4 = 0 \\ \Leftrightarrow & \tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \vee \tan\frac{\alpha}{2} = -2. \end{aligned}$$

Como a reta r tem declive positivo e passa na origem, podemos concluir que a sua equação reduzida é $y = \frac{1}{2}x$.

www.academiaaberta.pt Rui Paiva