Proposta de resolução

Caderno 1

1.1. Comecemos por notar a existência de independência entre as dez experiências de lançamento do dado. Deste modo, como a probabilidade de obter o número 3 é igual a $\frac{1}{4}$, a variável aleatória

X: "n.º de vezes que se obtém o número 3 em 10 lançamentos do dado tetraédrico"

é tal que $X \sim B\left(10, \frac{1}{4}\right)$ (distribuição Binomial com dez experiências e probabilidade de sucesso igual a $\frac{1}{4}$).
Logo, $P(X=6) = {}^{10}C_6 \times \left(\frac{1}{4}\right)^6 \times \left(\frac{3}{4}\right)^4 \approx 0.016$.
A opção correta é a **(B)**.

1.2. Uma vez que f é diferenciável em $[0,2]$ então, pelo teorema da derivabilidade e continuidade, também é contínua em $[0,2]$. Assim, pelo Teorema de Lagrange

$$\exists c \in]0,2[:\ f'(c) = \frac{f(2)-f(0)}{2-0}.$$

Como $f(0)=1$ então

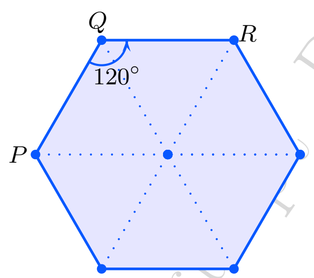
$$\exists c \in]0,2[:\ f'(c) = \frac{f(2)-1}{2}.$$

Por outro lado, como $0 < f'(x) < 9$ então

$$0 < f'(c) < 9 \Leftrightarrow 0 < \frac{f(2)-1}{2} < 9 \Leftrightarrow 1 < f(2) < 19.$$

A opção correta é a **(B)**.

2.1. Podemos observar na figura seguinte que $P\hat{Q}R = 120°$.



Pela definição de produto escalar temos

$$\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR} = ||\overrightarrow{QP}|| \times ||\overrightarrow{QR}|| \times \cos(120°)$$
$$= 4 \times 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -8.$$

2.2. Vamos começar por determinar as coordenadas do ponto P, ponto de interseção da reta PS com o plano PQR.
Para isso, comecemos por notar que, como $\vec{n} = (2,3,-1)$ é um vetor normal ao plano PQR, então $(x,y,z) = (14,5,0) + k(2,3,-1)$, $k \in \mathbb{R}$ é uma equação vetorial da reta PS.
Temos portanto:

$$\begin{cases} 2x+3y-z-15=0 \\ (x,y,z) = (14,5,0)+k(2,3,-1) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(14+2k)+3(5+3k)-(-k)-15=0 \\ (x,y,z) = (14+2k, 5+3k, -k) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} k=-2 \\ (x,y,z) = (14+2k, 5+3k, -k) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} --- \\ (x,y,z) = (10,-1,2). \end{cases}$$

Podemos concluir que $P(10,-1,2)$.

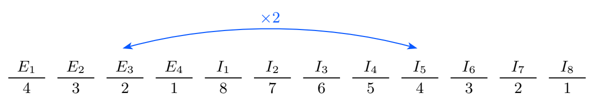
$$\overline{PS} = \sqrt{(10-14)^2 + (-1-5)^2 + (2-0)^2}$$
$$= \sqrt{56}.$$

Deste modo, a área lateral (6 faces laterais) arredondada às décimas é

$$6 \times \overline{PQ} \times \overline{PS} = 6 \times 4 \times \sqrt{56} \approx 179.6.$$

2.3. Como os vértices são escolhidos ao acaso, podemos utilizar a Lei de Laplace para resolver o problema.
Os casos possíveis são ${}^6C_2 \times {}^6C_2$ uma vez que para cada uma das ${}^6C_2$ possíveis escolhas de dois vértices de uma das faces podemos escolher dois vértices da outra face de ${}^6C_2$ modos.
Os casos favoráveis são 6 uma vez que há seis faces laterais.
Pela Lei de Laplace, a probabilidade pedida é $\frac{6}{{}^6C_2 \times {}^6C_2} \approx 0.03$.

3.1. Comecemos por ilustrar a situação com um esquema.



Note que no esquema E_i designa o estudante de Espanhol i para $i=1,2,3,4$ e I_j designa o estudante de Inglês j para $j=1,...,8$.
Podemos concluir pelo Princípio fundamental da contagem que há $4! \times 8! \times 2 = 1935360$ maneiras de fazer o pretendido.
A opção correta é a **(D)**.

3.2. Consideremos a experiência aleatória de escolha de um aluno da escola ao acaso e os acontecimentos:
E: "estudar Espanhol";
I: "estudar Inglês".
De acordo com os dados temos:
$P(E) = P(I)$; $P(E \cup I) = 4P(E \cap I)$.

Deste modo, a probabilidade pedida é:

$$P(I|E) = \frac{P(I \cap E)}{P(E)}.$$

Notemos agora que, como a escola não se dedica só ao ensino do Espanhol e do Inglês, $P(E) = P(I)$ não implica necessariamente que $P(E) = 0.5 \wedge P(I) = 0.5$.

$$\begin{aligned} & P(E \cup I) = 4P(E \cap I) \\ \Leftrightarrow\ & P(E) + P(I) - P(E \cap I) = 4P(E \cap I) \\ \Leftrightarrow\ & 2P(E) = 5P(E \cap I) \\ \Leftrightarrow\ & P(E \cap I) = \frac{2}{5}P(E). \end{aligned}$$

Consequentemente,

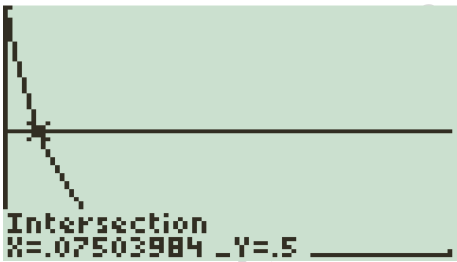
$$P(I|E) = \frac{\frac{2}{5}P(E)}{P(E)} = 0.4$$

e podemos concluir que a probabilidade pedida é 40%.

4. Os dados do enunciado indicam que $R = \lambda$ e $L = \frac{I}{2}$. Substituindo na equação dada e simplificando obtemos:

$$\begin{aligned} & L = I\,(1-R)^6\, e^{-3\lambda} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{I}{2} = I\,(1-\lambda)^6\, e^{-3\lambda} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{2} = (1-\lambda)^6\, e^{-3\lambda}. \end{aligned}$$

Introduzindo na calculadora gráfica as funções $y = \frac{1}{2}$ e $y = (1-x)^6\, e^{-3x}$ e recorrendo às suas potencialidades obtemos os gráficos seguintes e o seu ponto de interseção.



Logo, $R = \lambda \approx 0.075$.

5. Notemos que, como

$$|\cos x + i \sin x| = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = 1,$$

então

$$\begin{aligned} (\cos x + i \sin x)^{10} &= \left(e^{ix}\right)^{10} \\ &= e^{10ix} = \cos(10x) + i\sin(10x). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} & \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{3}\operatorname{Re}(z) \Leftrightarrow \sin(10x) = \frac{1}{3}\cos(10x) \\ \Leftrightarrow\ & \tan(10x) = \frac{1}{3} \wedge \cos(10x) \neq 0. \end{aligned}$$

Logo, como $x \in \left]0, \frac{\pi}{12}\right[$, $10x = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow x \approx 0.03$.
A opção correta é a **(B)**.

6. Como a, $a+6$ e $a+18$ são três termos consecutivos de uma progressão geométrica então

$$\begin{aligned} & \frac{a+6}{a} = \frac{a+18}{a+6} \Leftrightarrow \frac{(a+6)^2 - (a+18)a}{a(a+6)} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & -6a = -36 \wedge a(a+6) \neq 0 \Leftrightarrow a = 6. \end{aligned}$$

Logo a razão da progressão geométrica é $\frac{6+6}{6} = 2$.
Por outro lado,

$$S_7 = 381 \Leftrightarrow a_1 \times \frac{1-2^7}{1-2} = 381 \Leftrightarrow a_1 = 3.$$

Temos portanto que o primeiro termo é 3.

7. Uma vez que a região consiste na parte de um círculo centrado na origem de raio 2, os seus pontos (x, y) terão que satisfazer a condição

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 \leq 2^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 4.$$

Como se encontra à esquerda ou na reta de equação $x = -1$ ou à direita ou na reta de equação $x = 1$ então terá também que se verificar a condição

$$x \leq -1 \vee x \geq 1 \Leftrightarrow |x| \geq 1.$$

Podemos concluir que, como se verificam cumulativamente as duas condições, a opção correta é a **(C)**.

Caderno 2

8.1. Como

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} \wedge z = 3 \Leftrightarrow \frac{x-(-1)}{2} = \frac{y-2}{-1} \wedge z = 3$$

então podemos concluir que $A(-1, 2, 3)$ é um ponto de r e que $\vec{r} = (2, -1, 0)$ é um dos seus vetores diretores.
Nesta fase, como as opções **(A)** e **(D)** apresentam $\vec{r}$ como vetor diretor então estamos inclinados para estas opções.
Relativamente à opção **(A)**, averiguemos se $(3, 0, 3)$ é ponto de r.
Substituindo as suas coordenadas na equação da reta r dada temos

$$\frac{3+1}{2} = \frac{0-2}{-1} \wedge 3 = 3 \Leftrightarrow 2 = 2 \wedge 3 = 3.$$

Podemos concluir que a opção correta é a **(A)**.

8.2. $\arcsin(1) + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{6}.$

A opção correta é a **(A)**.

9. Vamos começar por simplificar w.

$$\begin{aligned} w &= 1 + \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{3}i^5}{1+2i} \\ &= 1 + \frac{\left(2\sqrt{3} - \sqrt{3}i\right)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} \\ &= 1 + \frac{2\sqrt{3} - 4\sqrt{3}i - \sqrt{3}i - 2\sqrt{3}}{5} = 1 - \sqrt{3}i. \end{aligned}$$

Vamos agora escrever w na forma trigonométrica. Como $|1-\sqrt{3}i| = \sqrt{1+3} = 2$ e $\text{Arg}(w) = -\frac{\pi}{3}$ então $w = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
Por outro lado, sabemos que os argumentos das raízes quartas de um complexo estão em progressão aritmética de razão $\frac{\pi}{2}$. Consequentemente, a raiz quarta pretendida é $2e^{-i\left(\frac{\pi}{3}\right)} \times e^{i\frac{\pi}{2}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

10.1. Comecemos por ilustrar a experiência numa tabela.

$\times$	0	1	2	3
0	$\cancel{0}$	0	0	0
1	0	$\cancel{1}$	2	3
2	0	2	$\cancel{4}$	6
3	0	3	6	$\cancel{9}$

Podemos observar que $P(X=0) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ e concluir que a opção correta é a **(D)**.

10.2. $\lim\left(\frac{n+k}{n}\right)^n = \lim\left(1+\frac{k}{n}\right)^n = e^k$.
Substituindo e^k na equação dada temos

$$\ln\left(\frac{e^k}{e}\right) = 3 \Leftrightarrow \ln e^{k-1} = 3 \Leftrightarrow k-1 = 3 \Leftrightarrow k = 4.$$

A opção correta é a **(D)**.

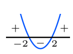
11. Comecemos por notar que $\ln b = 4\ln a \Leftrightarrow \frac{\ln b}{\ln a} = 4$.

$$\begin{aligned} & a^x \geq b^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow \ln a^x \geq \ln b^{\frac{1}{x}} \\ \Leftrightarrow\ & x\ln a \geq \frac{1}{x}\ln b \\ \Leftrightarrow\ & x \geq \frac{1}{x}\frac{\ln b}{\ln a} \\ \Leftrightarrow\ & x \geq \frac{1}{x} \times 4 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{x^2-4}{x} \geq 0. \end{aligned}$$

Para estudar o sinal da expressão $\frac{x^2-4}{x}$ vamos recorrer a uma tabela onde se estuda separadamente o sinal do seu numerador e denominador. Para isso, notemos que

$$x^2-4 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2.$$

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
x^2-4	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{x^2-4}{x}$	$-$	0	$+$	ND	$-$	0	$+$



Podemos concluir que

$$\frac{x^2-4}{x} \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-2,0[\cup[2,+\infty[.$$

12.1.

$$\begin{aligned} & g(x) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left(\frac{e^{2x}-1}{4x} = 0 \wedge x < 0\right) \vee \left(\frac{1}{2-\sin(2x)} = 0 \wedge 0 \leq x \leq \pi\right) \\ \Leftrightarrow\ & \left(e^{2x}-1 = 0 \wedge x \neq 0 \wedge x < 0\right) \vee x \in \varnothing \\ \Leftrightarrow\ & e^{2x} = 1 \wedge x \neq 0 \wedge x < 0 \\ \Leftrightarrow\ & x = 0 \wedge x \neq 0 \wedge x < 0 \\ \Leftrightarrow\ & x \in \varnothing. \end{aligned}$$

Podemos concluir que a função g não tem zeros e que a opção correta é a **(A)**.

12.2.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-}\frac{e^{2x}-1}{4x} &\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \frac{1}{2}\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{2x}-1}{2x} \\ &= \frac{1}{2}\lim_{y\to 0^-}\frac{e^y-1}{y} = \frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{2-\sin(2x)} = \frac{1}{2} = g(0).$$

Como

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^+} g(x) = g(0)$$

então g é contínua em $x = 0$.

12.3.

$$g'(x) = \frac{-1\times(-2\cos(2x))}{(2-\sin(2x))^2} = \frac{2\cos(2x)}{(2-\sin(2x))^2}.$$

$$\begin{aligned} & g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos(2x) = 0 \wedge (2-\sin(2x))^2 \neq 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \wedge \sin(2x) \neq 2 \\ \Leftrightarrow\ & x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Para encontrar as soluções desta equação no conjunto $]0,\pi]$ vamos atribuir valores a k:

- $k = -1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4} \notin]0,\pi]$;
- $k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \in]0,\pi]$;
- $k = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4} \in]0,\pi]$;
- $k = 2 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{2} = \frac{5\pi}{4} \notin]0,\pi]$.

Podemos concluir que

$$g'(x) = 0 \wedge x \in]0,\pi[\Leftrightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}.$$

Na tabela seguinte é apresentado o estudo do sinal de g' e da monotonia de g em $]0,\pi]$.

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
g		$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$	

Logo, g é crescente em $\left]0,\frac{\pi}{4}\right]$ e em $\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$ e decrescente em $\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$. Temos também que $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2-\sin\frac{2\pi}{4}} = \frac{1}{1} = 1$ e $g(\pi) = \frac{1}{2-\sin(2\pi)} = \frac{1}{2}$ são máximos relativos e $g\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{2-\sin\frac{6\pi}{4}} = \frac{1}{3}$ é mínimo relativo.

13.

$$\lim_{x\to\pi^-}\frac{x}{\sin x} = \frac{\pi}{0^+} = +\infty.$$

Podemos concluir que a reta de equação $x = \pi$ é assíntota do gráfico de f e que a opção correta é a **(B)**.

14. De acordo com o enunciado temos

$$P(a, h(a)) = \left(a, \frac{\ln a}{a}\right); \quad Q(a, h(2a)) = \left(2a, \frac{\ln(2a)}{2a}\right).$$

O declive da reta PQ é

$$m_{PQ} = \frac{\frac{\ln(2a)}{2a} - \frac{\ln a}{a}}{2a - a} = \frac{\ln(2a) - 2\ln a}{2a^2}.$$

Seja $f(a) = \frac{\ln(2a) - 2\ln a}{2a^2}$.
Para o triângulo da figura ser isósceles, o declive da reta PQ tem que ser igual a 1, ou seja $f(a) = 1$.
Como
$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\ln 1 - 2\ln\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 2\ln 4 > 2\ln e = 2 > 1$;
$f(1) = \frac{\ln 2 - 2\ln 1}{2} = \frac{\ln 2}{2} < \frac{\ln e^2}{2} = 1$
então $f(1) < 1 < f\left(\frac{1}{2}\right)$. Como f é contínua em $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, por ser a diferença, divisão e composição de funções contínuas, então o Teorema de Bolzano garante que a equação $f(a) = 1$ tem pelo menos uma solução no intervalo $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$.