Associação de Professores de Matemática
Contactos:
Rua Dr. João Couto, n.º 27-A
1500-236 Lisboa
Tel.: +351 21 716 36 90 / 21 711 03 77
Fax: +351 21 716 64 24
http://www.apm.pt
email: geral@apm.pt

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA APLICADA ÀS CIÊNCIAS SOCIAIS DO ENSINO SECUNDÁRIO (CÓDIGO DA PROVA 835) – 1ª FASE – 28 DE JUNHO 2023

1. Pela observação da informação representada na figura, sabemos que o número de inscrições por cada zona, é:

- Zona Norte: 4x10=40 pessoas inscritas
- Zona Centro: 3,5x10=35 pessoas inscritas
- Zona Sul: 3x10=30 pessoas inscritas

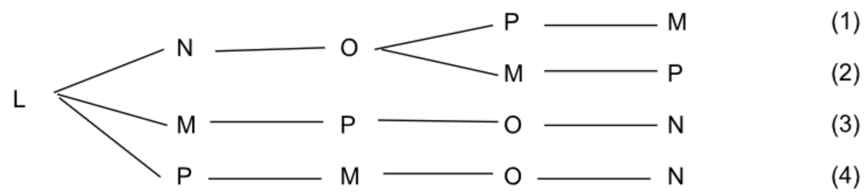
Aplicando o método descrito, temos que:

	Zona Norte	Zona Centro	Zona Sul
Número de inscrições	40	35	30
Divisor padrão	105/15=7		
Quota padrão	40/7≈5,7	35/7=5	30/7≈4,3
1.ª atribuição	—	5	—
L	5	—	4
$\sqrt{L(L+1)}$	$\sqrt{30} \approx 5{,}5$	—	$\sqrt{20} \approx 4{,}5$
Quota modificada	5+1=6	—	4

Desta forma, a comissão deve ser constituída por:

- 6 moradores da Zona Norte;
- 5 moradores da Zona Centro;
- 4 moradores Zona Sul.

2.1. Analisando o grafo da figura, e determinando todas as visitas nas condições descritas, num diagrama em árvore, temos:



Assim, vem que:

- Existem 4 percursos possíveis - I - c)
- Em apenas dois percursos o expositor N é visitado depois do expositor O - percursos (3) e (4) - II - b)
- O expositor M não pode ser visitado imediatamente após o expositor N - III - a)
- Imediatamente a seguir à visita do expositor N, só podemos visitar o expositor O - VI - b)

Logo, as correspondências corretas são:

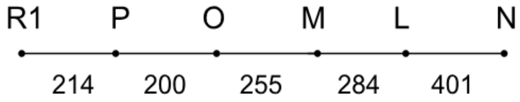
- I - c)
- II - b)
- III - a)
- IV - b)

2.2.

De acordo com a tabela e com a aplicação do algoritmo, iniciando a verificação no restaurante, obtemos a seguinte ordenação dos troços:

- R1 - P (214 m)
- P - O (200 m)
- O - M (255 m) - Não se seleciona o troço O-P porque P já foi visitado
- M - L (284 m) - O, P e R1 já foram visitados
- L - N (401 m) - todos os restantes já foram visitados.

Assim um grafo ponderado que representa o percurso escolhido pela aplicação do método descrito, é:



O percurso que respeita as condições definidas, é: R1 - P - O - M - L - N

Finalmente a distância, em metros, percorrida pelo Rui, é:

214+200+255+284+401= 1354 m

3.

Sabemos que: $$SL = SB + SR - SS - RF$$

$$SB = 1500€$$

$$SR = 5{,}2€ \times 22\ dias = 114{,}4$$

$$SS = 1500 \times 0{,}11 = 165$$

$$RF = 1500 \times \mathbf{0{,}146} = 219$$

O valor da taxa de retenção (**14,6%)** resulta da leitura na tabela 2, resultante do cruzamento do salário inserido no intervalo]1437,00; 1577,00] com o número de 2 dependentes.

O cálculo do salário líquido resulta em:

$$SL = 1500 + 144{,}4 - 165 - 219 = \mathbf{1230{,}40}€$$

4.

Comecemos por determinar o total de pontos dos prémios temporariamente destinados a cada um dos amigos:

Augusto: 32 (do prémio X) + 30 (do prémio Z) =62 pontos

Joaquim: 51 (do prémio Y) = 51 pontos

Como o total de pontos não é igual procedemos ao ajuste na partilha através da partilha de um dos prémios. O prémio a partilhar, será de entre os prémios do Augusto (que é o que tem mais pontos), aquele que tiver <u>menor</u> diferença de pontos atribuídos.

$$\text{Prémio X: } 32 - 24 = 8\ pontos$$

$$\text{Prémio Z: } 30 - 25 = \mathbf{5\ pontos}$$

Os amigos vão partilhar o prémio Z. O total final de pontos a atribuir ao Augusto corresponde à diferença entre o total temporário dos seus pontos e x por cento dos pontos por ele atribuídos ao prémio Z (30). O total final de pontos a atribuir ao Joaquim corresponde à soma do total temporário dos seus pontos com x por cento dos pontos por ele atribuídos ao prémio Z (25), Igualam-se os dois totais finais, de modo a determinar o valor de x, ou seja,

$$62 - 30x = 51 + 25x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -30x - 25x = 51 - 62 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -55x = -11 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-11}{-55} = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

Respostas:

I	II	III	IV
b) Y	b) 62	c) Z	c) 80%

5.

5.1.

Início de 1980 -> $t = 1$

Início de 1990 -> $t = 2$

Início de 2000 -> $t = 3$

Início de 2010 -> $t = 4$

Início de 2020 -> $t = 5$

Inserindo o modelo fornecido na calculadora e consultando a tabela de valores obtém-se

(A) $A(2) - A(1) \approx 2003{,}63$

(B) $\boldsymbol{A(3) - A(2) \approx 2010{,}83}$

(C) $A(4) - A(3) \approx 1508{,}22$

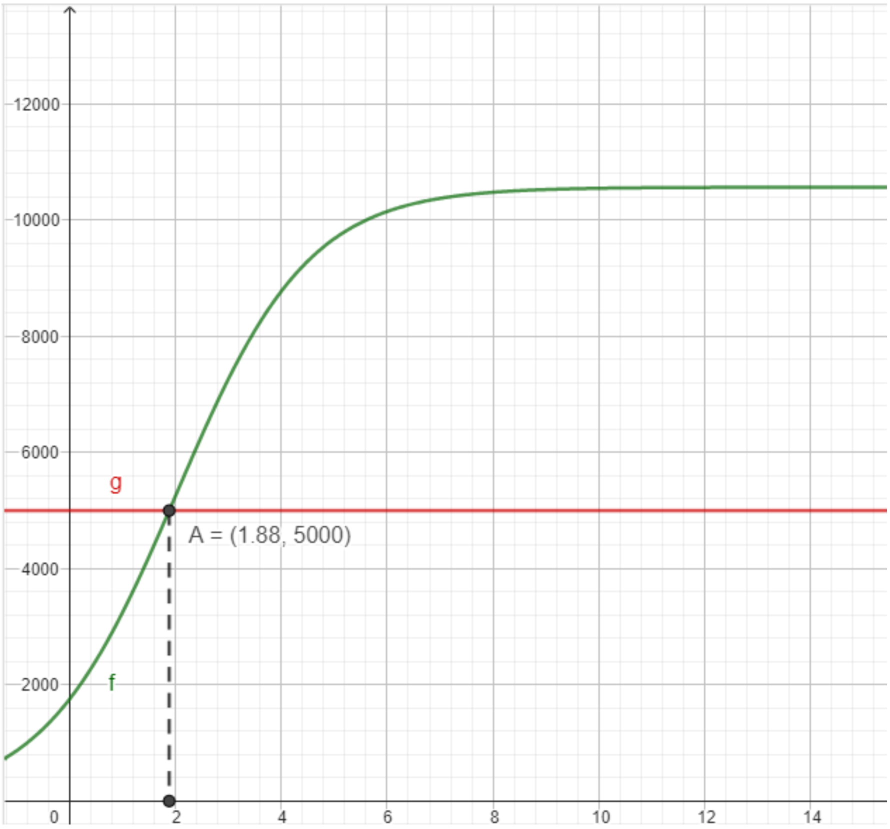
(D) $A(5) - A(4) \approx 902{,}44$

Resposta: **Opção B**

5.2.

Com o modelo introduzido na calculadora (f(x), acrescentamos uma outra função definida por g(x)=5000

Pretende-se encontrar o ponto de interseção dos dois gráficos (f(x)=g(x))



Como $1 < 1{,}88 < 2$

Os 5000 milhares de habitantes foram atingidos depois de 1980 (t=1) e antes de 1990 (t=2), ou seja, durante a década de 80

5.3.

Se as duas freguesias tinham o mesmo número de habitantes no início do ano 1970, então

$A(0) = B(0)$

Vamos começar por determinar o valor de $\boldsymbol{a}$.

Sabendo que, $A(0) = \frac{10566}{1+5e^{-0,8\times 0}} = 1761$

e que $A(0) = B(0)$, temos:

$$1761 = \frac{a}{1+4e^{-0,7\times 0}} \Leftrightarrow 1761 = \frac{a}{5} \Leftrightarrow a = 8805$$

No início do ano 2020, corresponde a t=5, assim, o número de habitantes da freguesia de Bileira é:

$$B(5) = \frac{8805}{1+4e^{-0,7\times 5}} \approx 7856$$

6.

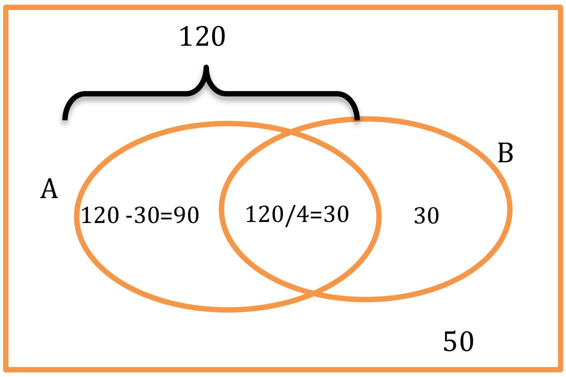
1º Processo

Considerando os acontecimentos:

A: "A rifa é verde"

B: "A rifa é premiada"

Obtém-se o seguinte diagrama onde:



- O número de rifas verdes premiadas é igual a $\frac{120}{4} = 30$, o que corresponde a $(A \cap B)$.
- O número de rifas que não são verdes e são premiadas é igual ao número de rifas verdes premiadas, logo são 30, o que corresponde a $(\bar{A} \cap B)$.

O número de rifas que não são verdes são $200 - 120 = 80$, que corresponde a $\bar{A}$

O número de rifas que não são verdes nem premiadas, são: $200 - (120 + 30) = 50$, que corresponde a $(\bar{A} \cap \bar{B})$.

Assim, a probabilidade da rifa escolhida não ser premiada, sabendo que não é verde, é:

$$P(\bar{B}|\bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{A})} = \frac{50}{80} = 0{,}625$$

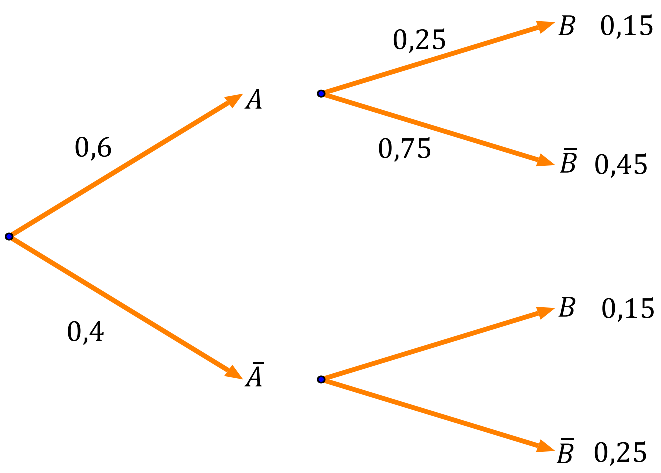
2º Processo

Considerando os acontecimentos:

A: "A rifa é verde"

B: "A rifa é premiada"

Podemos construir um diagrama em árvore com os dados do enunciado:



$$P(A) = \frac{120}{200} = 0{,}6$$

$$P(B|A) = 0{,}25$$

Daqui podemos concluir que:

$P(A \cap B) = 0{,}6 \times 0{,}25 = 0{,}15$

E que:

$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

Também nos foi dito que $P(\bar{A} \cap B) = P(A \cap B)$, logo, 0,15

Assim, facilmente completamos os ramos da árvore:

$$P(\bar{B}|A) = 0{,}75$$

$$P(A \cap \bar{B}) = 0{,}6 \times 0{,}75 = 0{,}45$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - (0{,}15 + 0{,}45 + 0{,}15) = 0{,}25$$

No final, pede-se para calcular $P(\bar{B}|\bar{A})$

Assim, temos:

$$P(\bar{B}|\bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{A})} = \frac{0,25}{0,4} = 0,625$$

7. Seja X a variável "tempo que cada cliente aguarda até ser atendido na zona da restauração da Festa da Freguesia".

Segundo o enunciado, X segue uma distribuição aproximadamente normal em que $\mu = 15$. Tem-se também que:

$$P(7 < X < 23) = 0,9545$$

Ora, numa distribuição normal, sabemos que:

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0,9545$$

em que μ corresponde ao valor médio de X e σ corresponde ao seu desvio padrão.

Logo, $\mu - 2\sigma = 7$ e $\mu + 2\sigma = 23$, pelo que:

$$\mu - 2\sigma = 7 \Leftrightarrow 15 - 2\sigma = 7 \Leftrightarrow 2\sigma = 15 - 7 \Leftrightarrow 2\sigma = 8 \Leftrightarrow \sigma = 4$$

Pretende-se então determinar $P(11 < X < 15)$ e sabemos que $\mu - \sigma = 15 - 4 = 11$. Ou seja:

$$P(11 < X < 15) = P(\mu - \sigma < X < \mu) = \frac{P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)}{2} = \frac{0,6827}{2} = 0,34135$$

Assim, o número de clientes que se espera que aguardem entre 11 e 15 minutos é:

$$número\ de\ clientes = 1550 \times 0,34135 \approx 529$$

Será expectável que 529 clientes esperem entre 11 e 15 minutos na zona de restauração da Festa da Freguesia.

8.

8.1.

Variação da temperatura máxima de cada dia relativamente ao dia anterior:

Segunda: $23° - 26° = -3°$

Terça: $28° - 23° = 5°$

Quarta: $29° - 28° = 1°$

Quinta: $29° - 29° = 0°$

Sexta: $28° - 29° = -1°$

Sábado: $26° - 28° = -2°$

Logo, a opção onde está representada, para a primeira semana da Festa da Freguesia, o gráfico de variação da temperatura é a **opção D.**

8.2.

COLUNA I	COLUNA II
(a) Dados da temperatura mínima	**(2)** Q1 = 15 e $Med = 15$ **(5)** $s(x) = 0{,}756$
(b) Dados da temperatura máxima	**(1)** $\bar{x} = 27$ e $Med = 28$ **(6)** Amplitude = $29 - 23 = 6$
(c) dados da precipitação acumulada diária	**(3)** De segunda para terça, a precipitação diminui mas as temperaturas mínima e máxima aumentam. **(4)** Não existe moda, isto é, não existe nenhum valor da precipitação que se repita. **(7)** A média é igual a $0{,}73mm$. Só existem 2 registos acima da média, logo, $2/7 \times 100 \approx 28{,}6\%$, que é inferior a 30%.

Para várias das relações estabelecidas entre as colunas I e II da tabela anterior, foram introduzidos na calculadora os dados das três variáveis (temperatura mínima, máxima e precipitação) e para cada variável determinados a média, o desvio padrão, o Q1 , Q2=Med, Q3, e ainda observados os valores máximos e mínimos.

8.3.

Soma das temperaturas máximas registadas na primeira semana: $7 \times 27 = 189$

Soma das temperaturas máximas registadas na segunda semana: $189 - 7x$

Expressão da média das temperaturas máximas registadas nas duas semanas: $\frac{189+(189-7x)}{14}$

Equação para calcular o valor de x, sendo x a descida, em graus Celcius, da temperatura máxima, comparando a temperatura máxima registada no domingo, dia 7, com a temperatura máxima registada no domingo, dia 14:

$$\frac{189 + (189 - 7x)}{14} = 25{,}5 \Leftrightarrow$$

Resolução da equação:

$$\Leftrightarrow 378 - 7x = 357 \Leftrightarrow -7x = 357 - 378 \Leftrightarrow -7x = -21 \Leftrightarrow x = \frac{-21}{-7} = 3$$

Conclusão: **A temperatura máxima desceu 3°C.**

9. Para determinar o intervalo de confiança para a proporção de visitantes da Festa que a visitaram pela primeira vez em 2022, necessitamos de calcular a dimensão da amostra:

$$n.º\ de\ elementos\ da\ amostra = n = 90 + 420 + 210 + 180 = 900$$

No gráfico circular representado verificamos que 90 pessoas visitaram pela primeira vez a Festa da Freguesia em 2022, pelo que a proporção amostral é:

$$\hat{p} = \frac{90}{900} = 0{,}1$$

Como a amostra tem uma dimensão superior a 30 elementos, poderemos calcular o intervalo de confiança para a proporção de visitantes pela primeira vez em 2022, tendo em conta que:

$$n = 900 \quad ; \quad \hat{p} = 01 \quad ; \quad z_{90\%} = 1{,}645$$

$$\left]0{,}1 - 1{,}645\sqrt{\frac{0{,}1 \times (1 - 0{,}1)}{900}};\ 0{,}1 + 1{,}645\sqrt{\frac{0{,}1 \times (1 - 0{,}1)}{900}}\right[=]0{,}08; 0{,}12[$$

Concluímos então que a proporção de visitantes da Festa de Freguesia que a visitaram pela primeira vez em 2022 pode ser enquadrada no intervalo]0,08; 0,12[com 90% de confiança.