Associação de Professores de Matemática
Contactos:
Rua Dr. João Couto, n.º 27-A
1500-236 Lisboa
Tel.: +351 21 716 36 90 / 21 711 03 77
Fax: +351 21 716 64 24
http://www.apm.pt
email: geral@apm.pt

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA APLICADA ÀS CIÊNCIAS SOCIAIS DO ENSINO SECUNDÁRIO (CÓDIGO DA PROVA 835) – 1ª FASE – 30 DE JUNHO 2021

1.

1.1.

Seguindo os passos do método indicado, acompanhado da leitura dos respetivos polígonos de competências, vamos calcular as pontuações obtidas por cada um dos candidatos:

Alice: $5 \times 4 + 4 \times 3 + 3 \times 3 + 2 \times 5 + 1 \times 4 = 55\ pontos$
Bruno: $5 \times 4 + 4 \times 2 + 3 \times 3 + 2 \times 3 + 1 \times 3 = 46\ pontos$
Carlota: $5 \times 3 + 4 \times 5 + 3 \times 5 + 2 \times 3 + 1 \times 4 = 60\ pontos$
Delfim: $5 \times 5 + 4 \times 3 + 3 \times 3 + 2 \times 3 + 1 \times 3 = 55\ pontos$

Por ordem decrescente de pontuação, a ordenação dos candidatos será a Carlota em primeiro, porque tem a maior pontuação (60 pontos), a Alice e o Delfim em segundo com a mesma pontuação (55 pontos) e Bruno em terceiro, porque tem a menor pontuação (46 pontos).
Como foram admitidos pela empresa dois candidatos, um deles foi a Carlota e outro tem que ter sido selecionado entre a Alice e o Delfim, porque ficaram empatados no segundo lugar. Assim, de acordo com as regras do método, a seleção entre a Alice e o Delfim foi feita por entrevistas.

1.2.

Para determinar $P(A|B)$ podemos pensar que queremos determinar a probabilidade do acontecimento A, sabendo que já ocorreu o acontecimento B.
O conhecimento da ocorrência do acontecimento B reduz os casos possíveis a 3, porque apenas os polígonos de competências da Alice, da Carlota e do Delfim têm assinalado pelo menos o nível 3 na capacidade de negociação (N). Destes três polígonos de competências, apenas o da Alice tem assinalado o nível 4 na capacidade de comunicação(C), pelo que apenas 1 é favorável ao acontecimento A.
Assim $P(A|B) = \frac{1}{3}$

Outra hipótese de obter a resposta

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

Porque:

- $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, pois dos quatro polígonos apenas o da Alice verifica os acontecimentos A e B em simultâneo, ou seja, tem assinalado o nível 4 na capacidade de comunicação(C) e pelo menos o nível 3 na capacidade de negociação (N)
- $P(B) = \frac{3}{4}$, pois dos quatro polígonos de competências, apenas três têm assinalado pelo menos o nível 3 na capacidade de negociação (N), que são o da Alice, o da Carlota e o do Delfim.

Resposta: **Opção B**

2.

Comecemos por determinar o valor que a Célia atribuiu à viagem Z, ou seja o valor **a** da tabela.

Como a Célia considerava justo receber 1550€, então o valor global por ela atribuído às viagens foi $1550 \times 2 = 3100$€

Assim $\boldsymbol{a} = 3100 - (1000 + 1500) = 600$€, e podemos completar a tabela:

Viagens	X	Y	Z	Valor Global	Valor Justo
Célia	1000	1500	600	3100	1550
Guilherme	1400	1000	550	1400+1000+550=2950	$2950 \div 2 = 1475$

Façamos agora a atribuição das viagens, com o equivalente valor em dinheiro e os ajustes:

- Célia fica com as viagens Y e Z o que equivale a 1500+600=2100€, que é superior ao seu valor justo, pelo que tem que de excedente $2100 - 1550 = 550$€
- Guilherme fica com a vigem X que equivale a 1400€, que é inferior ao seu valor justo, pelo que tem que receber $1475 - 1400 = 75$€
- A diferença entre o que a Célia paga e o Guilherme recebe, $550 - 75 = 475$€ , deverá ser dividida igualmente pelos dois, o que dá $475 \div 2 = 237{,}5$€ para cada um.

Desta forma ficará assim a distribuição final:

Célia: Viagens X e Y e paga $550 - 237{,}5 = 312{,}5$€.

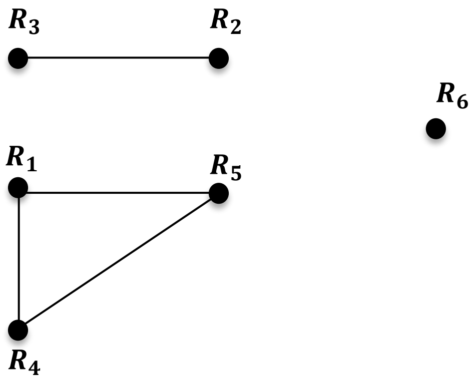
Guilherme: Viagem X e recebe $75 + 237{,}5 = 312{,}5$€

Resposta: O Guilherme fica com a viagem X e recebe 312,5€.

3.

Comecemos por realizar a modelação matemática do problema na forma de Grafo.

Os vértices irão constituir as 6 reuniões da empresa e as arestas irão interligar as que são possíveis de serem realizadas simultaneamente (tendo em conta as pessoas que nelas participam):
Assim, obtemos o grafo desconexo



Podemos observar que R_6 não poderá ocorrer simultaneamente com as restantes reuniões, tendo em conta que nesta reunião existe sempre algum funcionário em comum com as restantes. As reuniões R_1, R_4 e R_5 poderão ocorrer simultaneamente. Mas, R_1 não poderá acontecer ao mesmo tempo que R_2 e R_3 (o António participa em R_1 e R_2 e o Bernardo participa em R_1 e R_3). Por sua vez, R_5 não poderá ocorrer simultaneamente com R_3 (o Guilherme participa em ambas), nem com R_2 (o Xavier participa em ambas). Da mesma forma, R_4 não poderá acontecer ao mesmo tempo que R_2 e R_3 (o Diamantino e a Elsa participam em R_4 e R_2 e o Fausto e o Paulo participam em R_4 e R_3). R_3 e R_2 poderão ocorrer simultaneamente, pois também estas reuniões não têm funcionários em comum.

Ora, tendo em conta esta ideia, concluímos que poderemos formar os seguintes blocos de reuniões simultâneas: R_1, R_4 e R_5; R_2 e R_3; R_6. Estes blocos constituem o número mínimo de blocos de 90 minutos para que as reuniões ocorram nas condições definidas.

Ou seja:

$$tempo\ mínimo = 90 + 90 + 90 = 270\ minutos$$

Em horas:

$$\frac{270}{60} = 4{,}5\ horas$$

4.

Até às 12 primeiras prestações, o valor a cobrar ao Manuel é dado por:

$$parcela\ mensal = \frac{1530}{18} = 85€ \qquad taxa = 0{,}07 \times 85 = 5{,}95€$$

$$prestação\ mensal = 85 + 5{,}95 = 90{,}95€$$

O valor abatido até aos 12 meses foi:

$$valor\ abatido\ 12\ meses = 12 \times 90{,}95 = 1091{,}40€$$

Assim, fica a faltar a quantia dos 6 restantes meses dada por:

$$quantia\ a\ abater\ 6\ meses = 6 \times 85 = 510\ €$$

Ou seja:

$$valor\ pago\ nos\ últimos\ 6\ meses = 1644{,}75 - 1091{,}40 = 553{,}35\ €$$

$$valor\ taxado\ nos\ últimos\ 6\ meses = 553{,}35 - 510 = 43{,}35\ €$$

Para determina a nova taxa a aplicar, aplica-se uma regra de três:

$$\frac{85}{43{,}35} = \frac{100}{x} \Leftrightarrow x = \frac{43{,}35 \times 100}{85} = 51\%$$

$$taxa\ mensal = \frac{51}{6} = 8{,}5\%$$

Concluímos então que a nova taxa aplicada, tendo em conta as novas condições de empréstimo, foi de 8,5%.

5.

5.1.

Pretende-se saber $\frac{A(2)-A(0)}{A(0)}$

Depois de introduzir o modelo fornecido no editor de funções da calculadora, consultando a tabela de valores, obtém-se

$$\frac{A(2) - A(0)}{A(0)} \approx \frac{51{,}972 - 30}{30} \approx 0{,}732$$

O que corresponde a 73%.

5.2.

Inserindo ambos os modelos na calculadora e consultando as respetivas tabelas de valor, obtém-se

$\frac{A(12)}{B(12)} \approx \frac{104,553}{26,012} \rightarrow \frac{10455}{2601} \approx 4$

Resposta: **Opção B**

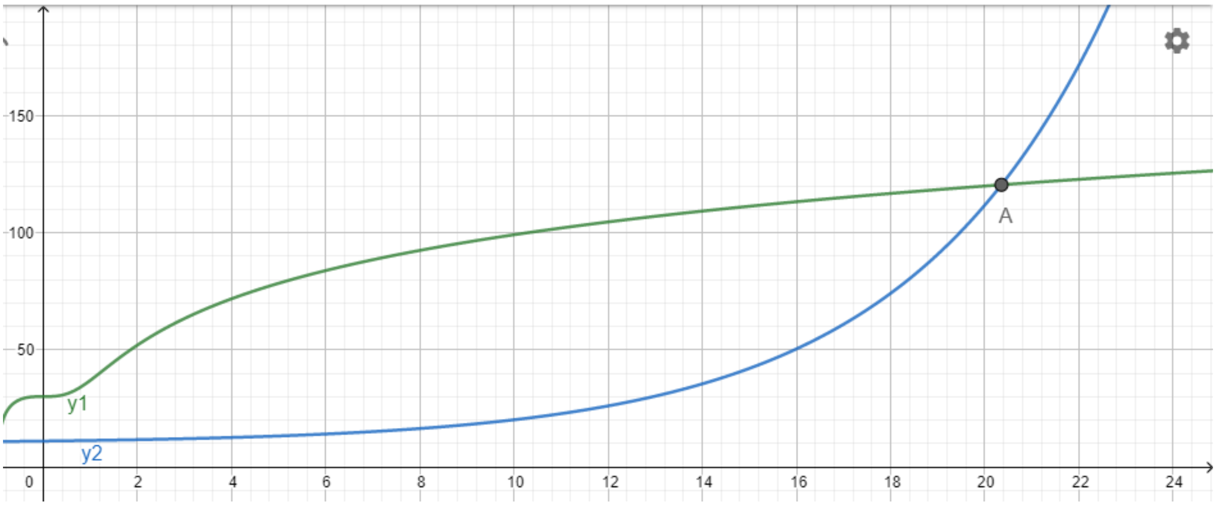
5.3.

Com os modelos definidos no editor de funções da calculadora

$y_1 = 30 + 10 \times \ln(x^3 + 1)$

$y_2 = 10 + 1,26^x$

Pode-se observar a respetiva representação gráfica, e calcular a respetiva interseção



$A(20,35; 120,40)$

O número de plantas da espécie A será igual ao número de plantas da espécie B ao fim de 20,35 meses o que corresponde a $20,35 \times 30 = 610,5 \rightarrow 611$ dias

6.

Número de viagens vendidas no mês de agosto: $0,48 \times 500 = 240$

Número de viagens vendidas no mês de julho: $\frac{240}{2} = 120$

Número de viagens vendidas no mês de setembro: $500 - 240 - 120 = 140$

Número de viagens vendidas em setembro para um destino internacional: $0,75 \times 140 = 105$

7.

Dado o diagrama de dispersão apresentado, vemos que o declive da reta de regressão e o coeficiente de correlação linear têm, ambos, sinal positivo. Assim, a única opção que satisfaz estas condições é a opção (D).

Resposta: **Opção D**

8.

No dia 3 de janeiro de 2015, a média das idades dos funcionários era $31{,}5 - 3 = 28{,}5$ anos.

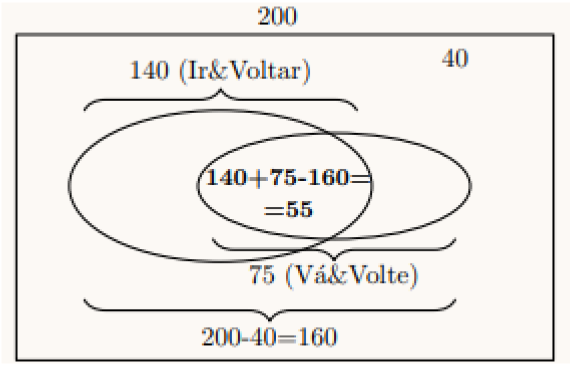
Assim,

$$\begin{aligned}
&28{,}5 = \frac{20 + 3 \times 22 + 2 \times 26 + b \times 31 + 2 \times 40}{1 + 3 + 2 + b + 2}\\
&\Leftrightarrow 28{,}5 = \frac{218 + 31b}{8 + b}\\
&\Leftrightarrow 28{,}5(8 + b) = 218 + 31b\\
&\Leftrightarrow 228 + 28{,}5b = 218 + 31b\\
&\Leftrightarrow 228 - 218 = 31b - 28{,}5b\\
&\Leftrightarrow 10 = 2{,}5b\\
&\Leftrightarrow b = \frac{10}{2{,}5}\\
&\Leftrightarrow b = 4
\end{aligned}$$

Conclui-se, assim, que 4 funcionários tinham 31 anos quando a agência foi inaugurada.

9.

9.1.



Como responderam ao questionário 200, e dessas, 40 não compraram viagens em nenhuma das duas agências, 200-40=160 pessoas compraram viagens em pelo menos uma das agências.

Como 140 pessoas compraram na agência Ir&Voltar e 75 compraram na agência Vá&Volte, então o número de pessoas que compraram viagens em ambas as agências é 140+75-160=55

Assim, a probabilidade de uma pessoa que respondeu ao inquérito já ter comprado viagens em ambas as agências, na forma de dízima, é:

$$\frac{55}{200} = 0{,}275$$

9.2.

Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, uma das pessoas que responderam ao questionário, e os acontecimentos:

C:«A pessoa já fez um cruzeiro»

I:«A pessoa já comprou viagens na agência Ir&Voltar»

Temos, de acordo com o enunciado, que:

$P(I) = \frac{140}{200} = 0{,}7$

$P(\bar{C}) = 0{,}35$ e

$P(\bar{C}|\bar{I}) = 0{,}7$

Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

	C	$\overline{C}$	
I		0,14	0,7
$\overline{I}$		0,21	0,3
		0,35	1

- $P(\bar{I}) = 1 - P(I) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$
- $P(\bar{C} \cap \bar{I}) = P(\bar{C}|\bar{I}) \times P(\bar{I}) = 0{,}7 \times 0{,}3 = 0{,}21$
- $P(\bar{C} \cap I) = P(\bar{C}) - P(\bar{C} \cap \bar{I}) = 0{,}35 - 0{,}21 = 0{,}14$

Desta forma a probabilidade, na forma de dízima, de uma das pessoas questionadas, escolhida ao acaso, ter comprado viagens na Ir&Voltar, sabendo-se que não fez um cruzeiro, é:

$$P(I|\bar{C}) = \frac{P(I \cap \bar{C})}{P(\bar{C})} = \frac{0{,}14}{0{,}35} = 0{,}4$$

10.

Calculando a proporção de clientes da Ir&Voltar que indicam o Dubai como destino favorito relativa a esta amostra, temos:

$n = 125 + 400 + 100 = 625$ e $\hat{p} = \frac{400}{625} = 0{,}64$

Considerando o intervalo de confiança para a proporção

$$\left]\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\,;\hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right[$$

Temos que a amplitude é: $2z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$

Assim, igualando a expressão da amplitude ao valor dado, substituindo os valores da proporção $(\hat{p})$ e de n, e resolvendo a equação, temos:

$$2z\sqrt{\frac{0{,}64(1-0{,}64)}{625}} = 0{,}075264 \Leftrightarrow z = \frac{0{,}075264}{2 \times \sqrt{\frac{0{,}64(1-0{,}64)}{625}}} \Leftrightarrow z \approx 1{,}96$$

Assim, temos que o nível de confiança associado ao valor $z \approx 1{,}96$, ou seja o nível de confiança do intervalo, é 95%.