1. Como Barcelona foi a cidade vencedora, começamos por aplicar o método, escolhendo todos os pares que envolvem esta cidade:

N.º de votos / Pares	36	58	X	29	Totais
Barcelona e Cracóvia	B	B	C	C	Barcelona: $36 + 58 = 94$ Cracóvia: $X + 29$
Barcelona e Praga	B	P	B	P	Barcelona: $36 + X$ Praga: $58 + 29 = 87$
Barcelona e Roma	B	R	B	B	Barcelona: $36 + X + 29 = X + 65$ Roma: 58

Assim, como sabemos que Barcelona teve mais votos que qualquer uma das restantes cidades, podemos verificar que:

- $X + 29 < 94 \Leftrightarrow X < 94 - 29 \Leftrightarrow X < 65$
- $36 + X + > 87 \Leftrightarrow X > 87 - 36 \Leftrightarrow X > 51$
- $X + 65 > 58 \Leftrightarrow X > 58 - 65 \Leftrightarrow X > -7$

Como X é um número natural, Barcelona tem mais votos que Roma independentemente do valor de X, para que Barcelona tenha mais votos que Praga, X deve ser superior a 51, ou seja deve ser no mínimo 52, e para que Barcelona tenha mais votos que Cracóvia, X deve ser inferior a 65, ou seja, deve ser 64 no máximo, pelo que, X representa no mínimo 52 e no máximo 64.

2. Aplicando o método descrito em primeiro lugar, temos:

Grupo	B	C	P	R
N.º de alunos	430	1020	850	200
Divisão por 1	430	1020	850	200
Divisão por 2	$\frac{430}{2} = 215$	$\frac{1020}{2} = 510$	$\frac{850}{2} = 425$	
Divisão por 3	$\frac{430}{3} \approx 143{,}3$	$\frac{1020}{3} = 340$	$\frac{850}{3} \approx 283{,}3$	
Divisão por 4		$\frac{1020}{4} = 255$	$\frac{850}{4} = 212{,}5$	
Divisão por 5		$\frac{1020}{5} = 204$	$\frac{850}{5} = 170$	

Ordenando os quocientes e atribuindo os convites ao grupo a que correspondem os quocientes ordenados, temos:

- Grupo B: 2 convites
- Grupo C: 4 convites
- Grupo P: 4 convites
- Grupo R: 0 convites

Fazendo a distribuição na proporção direta e comparando com a distribuição anterior, temos:

Grupo	B	C	P	R
Proporção direta	$\frac{430}{2500} \times 10 = 1{,}72$	$\frac{1020}{2500} \times 10 = 4{,}08$	$\frac{850}{2500} \times 10 = 3{,}4$	$\frac{200}{2500} \times 10 = 0{,}8$
Convites (proporção direta)	2	4	3	1
Convites (primeiro método)	2	4	4	0

Assim, podemos verificar que a adoção do segundo método proposto não implicaria alterações para os grupos B e C, seria desvantajoso para o grupo P e seria vantajoso para o grupo R, sendo este último o único com vantagem na aplicação do segundo método.

3. Como os bilhetes dos lugares da metade Oeste do anfiteatro foram vendidos a um quarto do valor dos bilhetes da metade Este, podemos dividir a receita de Bilheteira em 5 partes iguais, correspondendo uma dessas partes à metade Oeste do anfiteatro que representa um sector circular com 180° de amplitude.

   Assim a receita correspondente a cada um dos sectores circulares de cada opção é:

   - Opção A: Como neste sector 180° corresponde $\frac{1}{5}$ do total da receita, então a parte x da receita total, correspondente a 110°, é:

   $$\frac{180}{110} = \frac{\frac{1}{5}}{x} \Leftrightarrow x = \frac{\frac{110 \times 1}{5}}{180} \Leftrightarrow x = \frac{\frac{110}{5}}{180} \Leftrightarrow x = \frac{110}{900} \Rightarrow x \approx 0{,}122$$

   - Opção B: Como neste sector 180° corresponde $\frac{4}{5}$ do total da receita, então a parte x da receita total, correspondente a 28°, é:

   $$\frac{180}{28} = \frac{\frac{4}{5}}{x} \Leftrightarrow x = \frac{\frac{28 \times 4}{5}}{180} \Leftrightarrow x = \frac{\frac{112}{5}}{180} \Leftrightarrow x = \frac{112}{900} \Rightarrow x \approx 0{,}124$$

   - Opção C: Somando as receitas de cada uma das partes, a e b, deste sector circular, a parte x da receita total, correspondente é:

   $$\frac{180}{40} = \frac{\frac{1}{5}}{a} \Leftrightarrow a = \frac{\frac{40 \times 1}{5}}{180} \Leftrightarrow a = \frac{\frac{40}{5}}{180} \Leftrightarrow a = \frac{40}{900}$$

   $$\frac{180}{20} = \frac{\frac{4}{5}}{b} \Leftrightarrow b = \frac{\frac{20 \times 4}{5}}{180} \Leftrightarrow b = \frac{\frac{80}{5}}{180} \Leftrightarrow b = \frac{80}{900}$$

   $$x = a + b = \frac{40}{900} + \frac{80}{900} = \frac{120}{900} \approx 0{,}133$$

   - Opção D: Somando as receitas de cada uma das partes, a e b, deste sector circular, a parte x da receita total, correspondente é:

   $$\frac{180}{20} = \frac{\frac{1}{5}}{a} \Leftrightarrow a = \frac{\frac{20 \times 1}{5}}{180} \Leftrightarrow a = \frac{\frac{20}{5}}{180} \Leftrightarrow a = \frac{20}{900}$$

   $$\frac{180}{24} = \frac{\frac{4}{5}}{b} \Leftrightarrow b = \frac{\frac{24 \times 4}{5}}{180} \Leftrightarrow b = \frac{\frac{96}{5}}{180} \Leftrightarrow b = \frac{96}{900}$$

   $$x = a + b = \frac{20}{900} + \frac{96}{900} = \frac{116}{900} \approx 0{,}129$$

   Assim, podemos observar que o sector circular a que corresponde a maior receita é o que está representado na opção (C).

   Resposta: **Opção C**

4. De acordo com a tabela e com a aplicação do algoritmo, escolhendo inicialmente o edifício E1 e aplicando o algoritmo indicado, obtemos a seguinte ordenação das arestas e grafo ponderado da figura:

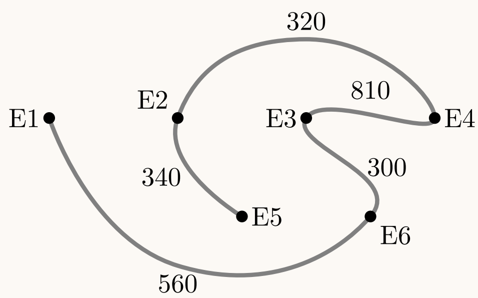
   I - Aresta E1-E6 - comprimento 560

   II - Aresta E6-E3 - comprimento 300

   III - Aresta E3-E4 - comprimento 810
   (não se considera a aresta E3-E6, porque o edifício E6 já foi escolhido)

   IV - Aresta E4-E2 - comprimento 320

   IV - Aresta E2-E5 - comprimento 340
   (não se considera a aresta E2-E4, porque o edifício E4 já foi escolhido)



Assim, o comprimento mínimo previsto, em metros, do fio de luzes a instalar, é:

$$560 + 300 + 810 + 320 + 340 = 2330 \text{ m}$$

Como a instalação da iluminação decorativa terá um custo de 3,5 euros por cada metro, o custo total desta instalação é:

$$2330 \times 3{,}5 = 8155 \text{ euros}$$

5.

5.1. Calculando o número de alunos estrangeiros inscritos nesta faculdade no início de 2004, ou seja 4 anos após o inicio de 2000 e o número de alunos estrangeiros inscritos no início de 2007, temos:

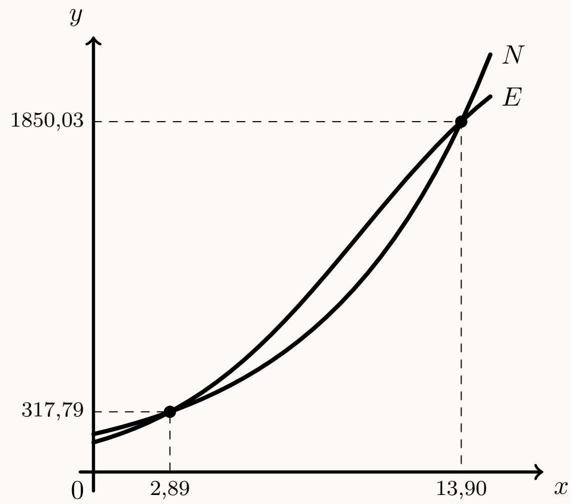
$$E(4) = \frac{2500}{1 + 15e^{-0{,}27\times 4}} \approx 410{,}24 \approx 410$$

$$E(7) = \frac{2500}{1 + 15e^{-0{,}27\times 7}} \approx 765{,}44 \approx 765$$

Assim podemos concluir que a afirmação é falsa porque o triplo do número de alunos estrangeiros inscritos na faculdade F1 no início de 2004 é $410\times 3 = 1230$, que é um valor que não é bem aproximado pelo valor de $E(7)$.

5.2. Representando na calculadora gráfica os modelos da variação do número de alunos estrangeiros inscritos nas duas faculdades ($y = \dfrac{2500}{1+15e^{-0,27x}}$ e $y = 200e^{0,16x}$), numa janela compatível com o limite temporal dos modelos, ou seja, $0 \leq x \leq 15$, obtemos os gráficos que se encontram reproduzidos na figura seguinte.

Usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção dos dois modelos, obtemos os valores aproximados (às centésimas) das coordenadas, ou seja, os valores correspondente aos tempos em que o número de alunos estrangeiros inscritos nas duas faculdades era igual, ou seja, os pontos de coordenadas $(2{,}89\,;\,319{,}79)$ e $(13{,}90\,;\,1850{,}03)$



Assim, observando os valores arredondados às unidades dos pontos de interseção $t_1 \approx 2{,}89 \approx 3$ e $t_2 \approx 13{,}90 \approx 13$ podemos concluir que, o número de alunos estrangeiros inscritos, no início de cada ano, na faculdade F1 foi superior ao número de alunos estrangeiros inscritos, no início de cada ano, na faculdade F2 entre 2003 e 2014, ou seja, durante $2014 - 2003 = 11$ anos.

6.

6.1. Pela observação do gráfico podemos verificar que no mês 6 a taxa de utilização da cantina foi de 12,7% e no mês 7 foi de 9,4%.

Como no mês 6, frequentaram a cantina 1016 alunos, podemos estabelecer a proporção para determinar o número de alunos a que frequentaram a cantina no mês 7:

$$\frac{12{,}7}{9{,}4} = \frac{1016}{a} \Leftrightarrow a = \frac{1016 \times 9{,}4}{12{,}7} \Leftrightarrow a = 752$$

Logo a redução do número de alunos é:

$$1016 - 752 = 264$$

Assim, a percentagem x da redução do mês 7 relativamente ao mês 6, corresponde à proporção de 264 relativamente a 1016:

$$\frac{1016}{264} = \frac{100}{x} \Leftrightarrow x = \frac{100 \times 264}{1016} \Rightarrow x \approx 26$$

Resposta: **Opção A**

6.2. Ordenando os dados de acordo com o gráfico ($b < 9{,}4$), podemos identificar a posição dos dados centrais, necessários para o cálculo da mediana:

$$\underbrace{b\,;\,9{,}4\,;\,11{,}7\,;\,12{,}7\,;\,13{,}9\,;\,14{,}5}_{50\%}\,;\,\underbrace{a\,;\,15{,}5\,;\,15{,}9\,;\,15{,}9\,;\,16{,}2\,;\,16{,}5}_{50\%}$$

Admitindo que a mediana dos dados recolhidos é 14,9%, e observando que é a média aritmética entre 14,5 e a, temos que:

$$\frac{14{,}5 + a}{2} = 14{,}9 \Leftrightarrow a = 14{,}9 \times 2 - 14{,}5 \Leftrightarrow a = 16 - 7 \Leftrightarrow a = 15{,}3\%$$

7. Podemos verificar que em cada período de 24 meses, o valor a pagar será de $280 \times 24 = 6720$ euros e analisando cada um dos períodos, relativamente à percentagem e valor dos juros, temos:

Período	Montante a pagar	Percentagem de juros	Valor dos juros
Primeiros 24 meses	6720	60%	$6720 \times 0{,}6 = 4032$
Segundos 24 meses	6720	25%	$6720 \times 0{,}25 = 1680$

Assim, temos que:

- Valor total a pagar: $280 \times 60 = 16\,800$ euros.
(Correspondente ao pagamento de 280 euros por mês durante 60 meses)
- Valor total dos juros: $16\,800 - 10\,500 = 6300$ euros.
(Correspondente à diferença entre o montante total pago e o valor do empréstimo)
- Valor dos juros a pagar após 48 prestações: $6300 - (4032 + 1680) = 588$ euros.
(Correspondente à diferença entre o valor dos juros e o valor dos juros correspondentes aos primeiros e segundos 24 meses)

8. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um dos alunos desta universidade que participaram no programa Erasmus+, e os acontecimentos:
R:≪O aluno ficou alojado numa residência universitária≫
C:≪O aluno ficou colocado na primeira cidade que seleccionou≫

Temos, de acordo com o enunciado, que: $P\left(\overline{C}|R\right) = 0{,}4$ e $P\left(C \cap R\right) = 0{,}18$

Assim, temos que: $P\left(C|R\right) = 1 - P\left(\overline{C}\right) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$

E como $P\left(C|R\right) = \dfrac{P\left(C \cap R\right)}{P\left(R\right)} \Leftrightarrow P\left(R\right) = \dfrac{P\left(C \cap R\right)}{P\left(C|R\right)}$, vem que a probabilidade, na forma de dízima, do aluno escolhido ter ficado alojado numa residência universitária, é:

$$P\left(R\right) = \frac{0{,}18}{0{,}6} = 0{,}3$$

9.

9.1. Pela observação do gráfico podemos verificar que que dos 110 participantes no programa, $15+10 = 25$ eram homens, e que destes foram 10 os que participaram no programa no segundo semestre, pelo que a probabilidade do aluno escolhido ter participado no programa no segundo semestre, sabendo-se que é do sexo masculino, é:

$$\frac{10}{25} = 0{,}4$$

Resposta: **Opção B**

9.2. Observando que existem 30 alunos com o perfil indicado (ter participado no segundo semestre e ser do sexo feminino), verificamos que existem $110 - 30 = 80$ que não correspondem a este perfil.

Assim, selecionando três alunos ao acaso, a probabilidade, na forma de dízima, com arredondamento às centésimas, de apenas um deles ter participado no segundo semestre e ser do sexo feminino, é:

$$\overbrace{\frac{30}{110} \times \frac{80}{109} \times \frac{79}{108}}^{\text{apenas o 1.º tem o perfil}} + \overbrace{\frac{80}{110} \times \frac{30}{109} \times \frac{79}{108}}^{\text{apenas o 2.º tem o perfil}} + \overbrace{\frac{80}{110} \times \frac{79}{109} \times \frac{30}{108}}^{\text{apenas o 3.º tem o perfil}} = 3 \times \frac{30 \times 80 \times 79}{110 \times 109 \times 108} \approx 0{,}44$$

9.3. Pela observação do gráfico podemos verificar que a média dos alunos que participaram no primeiro semestre é relativa a $15+55=70$ alunos, e que a média dos alunos que participaram no segundo semestre é relativa a $10+30=40$ alunos.

Assim a notta média dos 110 alunos é:

$$\bar{x}=\frac{15{,}65\times 70+14{,}22\times 40}{100}=15{,}13 \text{ valores}$$

10. Observando que 21 meses corresponde a 1 ano e 9 meses e que 9 meses representa $\frac{9}{12}=0{,}75$ anos, temos que o desvio padrão da amostra, em anos é 1,75.

Como a amostra dos alunos que participaram no programa Erasmus+ em 2019 tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:

- A dimensão da amostra: $n=324$
- A média amostral: $\overline{x}=20{,}16$ anos
- O desvio padrão amostral: $s=1{,}75$ horas
- O valor de z para um nível de confiança de 99%: $z=2{,}576$

Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança para o atraso médio $\left(\left]\overline{x}-z\frac{s}{\sqrt{n}}\,,\overline{x}+z\frac{s}{\sqrt{n}}\right[\right)$, e arredondando os valores às centésimas, temos:

$$\left]20{,}16-2{,}576\times\frac{1{,}75}{\sqrt{324}}\,;\,20{,}16+2{,}576\times\frac{1{,}75}{\sqrt{324}}\right[\approx\left]19{,}91;20{,}41\right[$$