Associação de Professores de Matemática
Contactos:
Rua Dr. João Couto, n.º 27-A
1500-236 Lisboa
Tel.: +351 21 716 36 90 / 21 711 03 77
http://www.apm.pt
email: geral@apm.pt

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA APLICADA ÀS CIÊNCIAS SOCIAIS DO ENSINO SECUNDÁRIO (CÓDIGO DA PROVA 835) – 1.ª FASE – 15 DE JULHO 2020

1.

1.1. Como o acontecimento R corresponde à escolha de um boletim em que o festival B ocupa a última preferência, e sabemos que este acontecimento se verificou, temos 4 casos possíveis (excluindo a primeira e a última das opções apresentadas).

Como se pretende que o festival A ocupe a primeira preferência, então dos 4 casos possíveis referidos temos 3 casos favoráveis. Ou seja, temos que $P(Q|R) = \frac{3}{4}$

Resposta: **Opção C**

1.2. Aplicando o método descrito antes de ser contabilizado o voto do Filipe, temos:

- Pontuação do festival A (4 votos na 1.ª preferência e 5 votos na 3.ª preferência):
$$4 \times 5 + 5 \times 1 = 20 + 5 = 25$$
- Pontuação do festival B (3 votos na 1.ª preferência, 4 votos na 2.ª preferência e 2 votos na 3.ª preferência):
$$3 \times 5 + 4 \times 3 + 2 \times 1 = 15 + 12 + 2 = 29$$
- Pontuação do festival C (2 votos na 1.ª preferência, 5 votos na 2.ª preferência e 2 votos na 3.ª preferência:
$$2 \times 5 + 5 \times 3 + 2 \times 1 = 10 + 15 + 2 = 27$$

Como após a contabilização dos votos do Filipe o festival C ficou em último lugar, e não se verificaram empates, o voto do Filipe colocou o festival C na 3.ª preferência, porque se fosse a 2.ª ou a 1.ª, o festival A não iria nunca obter um número de pontos superior ao do festival C.
Relativamente à 1.ª preferência, o Filipe escolheu o festival A, porque se fosse a 2.ª preferência, o festival A iria totalizar o mesmo número de pontos do festival C, e é sabido que não se registou qualquer empate.

Desta forma, o voto do Filipe indicou na 1.ª preferência o festival A, na 2.ª o festival B e na 3.ª o festival C.

E assim, a pontuação de cada filme, após a contabilização do voto do Filipe, é:

- Festival A: $25 + 5 = 30$
- Festival B: $29 + 3 = 32$
- Festival C: $27 + 1 = 28$

2.

Tendo em conta que o bilhete B2 é valorizado 3 vezes mais do que os restantes, podemos afirmar que a Elsa atribui uma valorização total de 8 unidades aos bilhetes todos, sendo que B2 é valorizado 3 vezes. Poderemos esquematizar a situação da seguinte forma:

B1	B2			B3	B4	B5	B6

Para que a Elsa valorize 50% do valor global, teremos de considerar a sequência de bilhetes que valem 4 unidades de valorização. Ou seja:

- B1; B4; B6 - $1 + 1 + 1 = 3$ unidades
- B2; B3; B5 - $3 + 1 + 1 = 5$ unidades
- B1; B3; B5; B6 - $1 + 1 + 1 + 1 = 4$ unidades
- B2; B3; B4; B5 - $3 + 1 + 1 + 1 = 6$ unidades

Resposta: **Opção C**

3.

Atribuem-se temporariamente os bens a cada um dos amigos (tendo em conta quem mais valorizou cada bem), contabilizando o total de pontos de cada um:

- Elsa – Atribui-se M
  $pontos\ temporários = 26$

- Gaspar – Atribui-se F e T
  $pontos\ temporários = 35 + 60 = 95$

Verifica-se que o Gaspar é o amigo com o total de pontos mais elevado (A) e a Elsa possui o menor número de pontos (B).

Tendo em conta que não possuem o mesmo número de pontos, procedemos ao ajuste desta partilha do bem T.

$$95-60x=26+55x \Leftrightarrow -60x-55x=26-95 \Leftrightarrow -115x=-69 \Leftrightarrow x=\frac{69}{115} \Leftrightarrow x=0{,}6$$

Distribuição final dos bens:

- Elsa: Mesa e 60%da utilização da Tenda
- Gaspar: Fogão e 40% da utilização da Tenda

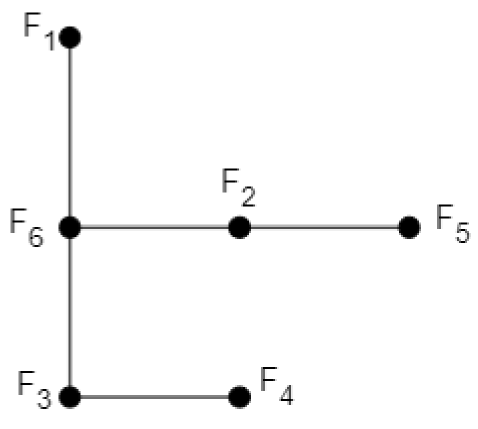
Para responder à questão, calculemos quantos dias é atribuída a tenda à Elsa e, por consequência, a quantos dias terá acesso o Gaspar a essa mesma tenda:

- Elsa $0{,}6 \times 365 = 219\ dias$, logo o Gaspar: $365 - 219 = 146\ dias$
  (Ou calculando diretamente, Gaspar: $0{,}4 \times 365 = 146\ dias$)

Concluímos que o Gaspar poderá usufruir da tenda durante 146 dias do ano, ou seja, o Gaspar não poderá utilizar a tenda durante o festival a que pretende ir.

4. Considerando os festivais representados pelos vértices, existem dois processos para a construção do grafo que representa esta situação: ligar os vértices tendo em conta as compatibilidades ou tendo em conta as incompatibilidades.

1º Processo:
O grafo que modele a situação apresentada pode ser o seguinte:



No grafo as arestas unem festivais que possam decorrer em simultâneo.
Ora, o festival F_6 pode decorrer em simultâneo com os festivais F_1, F_2 e F_3 mas estes não podem decorrer em simultâneo uns com os outros.
Caso o festival F_6 decorra em simultâneo com o F_2, então só teremos o F_3 e F_4 a decorrer também em simultâneo, tendo que F_1 e F_5 decorrerem em fins de semana separados , sendo necessários 4 fins de semana.

Caso o festival F_6 decorra em simultâneo com o F_3, então só teremos o F_2 e F_5 a decorrer também em simultâneo, , tendo que F_1 e F_4 decorrerem em fins de semana separados , sendo necessários 4 fins de semana.

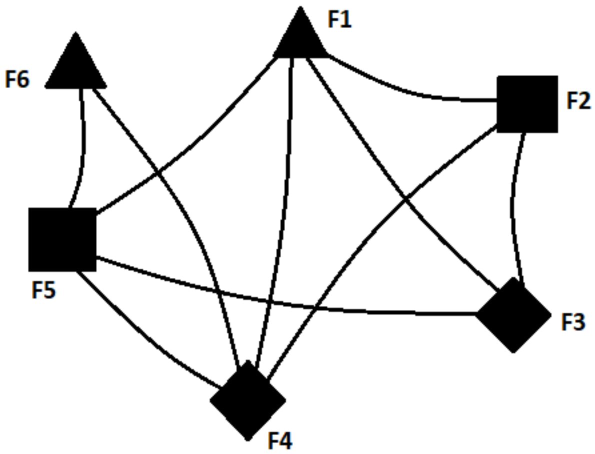
Caso o festival F_6 decorra em simultâneo com o F_1, então poderemos ter os festivais F_2 e F_5 a decorrer em simultâneo e ainda os festivais F_3 e F_4 também em simultâneo, sendo necessários 3 fins de semana.

Portanto, para obtermos o número mínimo de fins de semana em que os festivais podem ter ocorrido vamos assumir que ocorrem em simultâneo os seguintes pares de festivas: F_1 e F_6; F_2 e F_5; F_3 e F_4.

Podemos então concluir que no mínimo seriam necessários 3 fins de semana.

2º Processo

Um grafo que modele a situação apresentada pode ser o seguinte:



Em que dois vértices são ligados por uma aresta quando correspondem a festivais que não podem ocorrer simultaneamente.

Neste caso podemos utilizar símbolos diferentes de modo que vértices adjacentes nunca tenham o mesmo símbolo.

Desta forma podemos concluir que os festivais que podem ocorrer em simultâneo, são:

- F1 e F6
- F2 e F5
- F3 e F4

Podemos então concluir que no mínimo seriam necessários 3 fins de semana.

5.

Como o valor final da poupança é o dobro do depósito inicial, então o Filipe inicialmente depositou 120€.

Seja x o valor fixo depositado pelo Filipe em cada um dos 16 meses.
Então:

$$120 + 16x = 240 \Leftrightarrow 16x = 120 \Leftrightarrow x = 7{,}5\ €$$

Logo, a percentagem do depósito inicial que corresponde a quantia fixa depositada em cada mês é $\frac{7{,}5}{120} \times 100 = 6{,}25\%$.

Outra forma

Como o valor final da poupança é o dobro do depósito inicial, então o Filipe inicialmente depositou 120€, e o total de depósitos ao longo dos 16 meses foi também de 120€.

Como depositou mensalmente uma quantia fixa, então mensalmente depositou $120 \div 16 = 7{,}5$€.

Logo, a percentagem do depósito inicial que corresponde à quantia fixa de 7,5€ em cada mês é

120€ ---------- 100%

7,5€ ---------- x %

$$x = \frac{7{,}5 \times 100}{120} = 6{,}25\%.$$

6.

6.1.

Pretende-se saber $A(1) - A(0)$

Depois de introduzir o modelo fornecido no editor de funções da calculadora, consultando a tabela de valores, obtém-se

$$A(1) - A(0) \approx 6{,}09 - 1 \approx 5$$

O balão subiu 5 metros aproximadamente, no primeiro minuto.

Outra forma

Pretende-se saber $A(1) - A(0)$

$A(1) = \frac{30}{1+29e^{-2\times 1}} \approx 6{,}09$ e $A(0) = \frac{30}{1+29e^{-2\times 0}} = 1$

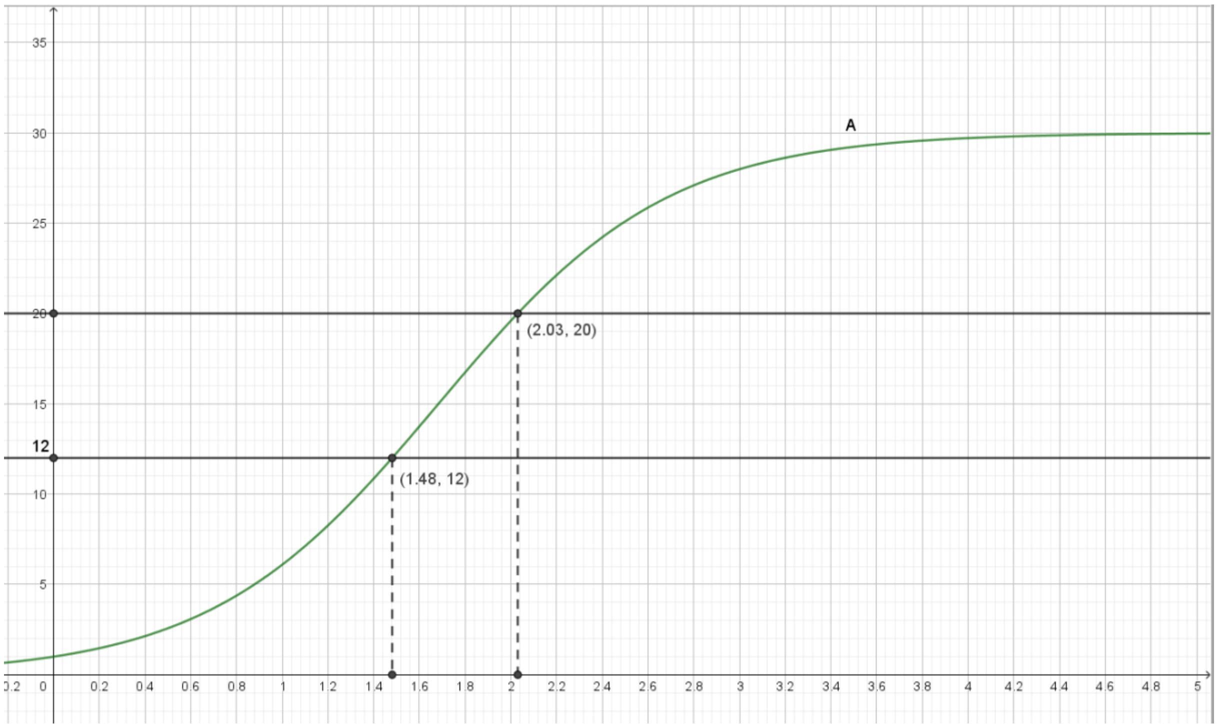
Então $A(1) - A(0) \approx 6{,}09 - 1 \approx 5$

O balão subiu 5 metros aproximadamente, no primeiro minuto.

6.2.

Com o modelo anteriormente definido no editor de funções da calculadora, acrescentam-se agora as funções y= 12 e y=20

Pode-se observar a respetiva representação gráfica, e calcular as respetivas interseções:



Pretende-se determinar o tempo decorrido: 2,03-2,48 = 0,55 minutos

O que corresponde a $60 \times 0{,}55 = \ 33\ segundos$

7.

7.1.

Soma dos tempos de espera das 7 pessoas da tabela até à abertura da bilheteira:

$30 + 24 + 22{,}5 + 18 + 12 + 8 + 3 \ = \ 117{,}5$

Tempo de espera do Filipe : a, que é igual ao do amigo.

Logo, recorrendo ao tempo médio de espera das 9 pessoas vem:

$$\frac{117{,}5 + 2a}{9} = 15{,}5 \Leftrightarrow 117{,}5 + 2a = 139{,}5 \Leftrightarrow 2a = 139{,}5 - 117{,}5 \Leftrightarrow a = \frac{22}{2} \Leftrightarrow a = 11$$

O Filipe esperou 11 horas até à abertura da bilheteira

7.2.

Número de pessoas que esperaram menos de três horas desde a abertura da bilheteira até adquirir os bilhetes na amostra considerada: 3

Total de pessoas que esperaram menos de três horas desde a abertura da bilheteira até adquirir os bilhetes: n

Sabemos que $0{,}004 \times n = 3 \Leftrightarrow n = \frac{3}{0{,}004} \Leftrightarrow n = 750$

750 corresponde a 60% do total de pessoas que adquiriram bilhete nesse dia. Seja T, esse total

$$0{,}60 \times T = 750 \Leftrightarrow T = \frac{750}{0{,}60} \Leftrightarrow T = 1250$$

Outra forma

Número de pessoas que esperaram menos de três horas desde a abertura da bilheteira até adquirir os bilhetes na amostra considerada: 3.

As 3 pessoas correspondem 0,4% de 60%, ou seja, correspondem a 0,24% do total de clientes, pois $0{,}4\%\ de\ 60\% = 0{,}004 \times 0{,}6 = 0{,}0024 = 0{,}24\%$

Então:

$3\ pessoas$ ---------- 0,24%

$x\ \ pessoas$---------- 100 %

$x = \frac{3\times 100}{0{,}24} = 1250\ pessoas.$

Resposta: **Opção A**

7.3

Coloquemos os dados nas listas da calculadora:

Primeira lista – 30; 24; 22,5; 18; 12; 8; 3

Segunda lista – 0,5; 1; 2; 4; 8; 9; 12

Determinando a regressão linear obtém-se

$$y \approx -0{,}459x + 12{,}913$$

Queremos saber o valor de y para $x = 6$

Teremos

$y \approx -0{,}459 \times 6 + 12{,}913 \approx 10$ horas

Terão decorrido 10 horas desde a abertura da bilheteira até à aquisição do bilhete

8.

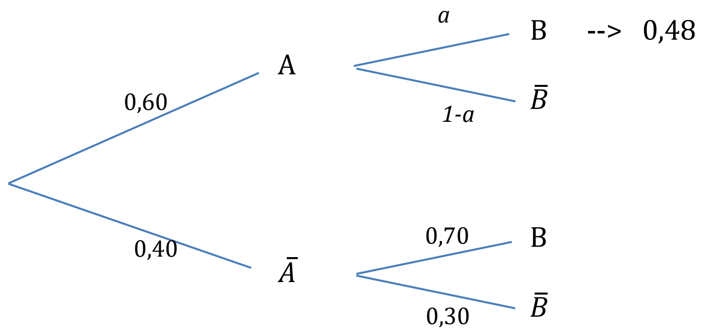
8.1.

Definam-se os acontecimentos:

A- "assistir ao primeiro concerto do dia"

B – "assistir ao fogo de artifício"

A situação apresentada pode ser traduzida pelo seguinte diagrama



Pretende-se calcular $P(\overline{B})$

Ora

$$0,60 \times a = 0,48 \Leftrightarrow a = \frac{0,48}{0,60} \Leftrightarrow a = 0,80$$

O que leva a que $1 - a = 0,20$

Então

$P(\overline{B}) = 0,60 \times 0,20 + 0,40 \times 0,30$=0,24

8.2.

Consideremos a variável aleatória X: "consumo de bebidas, em litros, das 60 000 pessoas presentes durante os vários dias do festival"

X segue uma distribuição normal -> N(1,5; 0,4)

Pretende-se saber $P(X \leq 0,3)$

Recorrendo à calculadora obtém-se

$P(X \leq 0,3) = normalcdf(-1000, 0.3, 1.5, 0.4) \approx 0,00135$

(ou de outra forma $P(X \leq 0,3) = 0.5 - normalcdf(0.3, 1.5, 1.5, 0.4) \approx 0,00135$)

Número de pessoas com consumo inferior ou igual a 0,3 litros: $60000 \times 0,00135 = 81$

9.

A amplitude do intervalo de confiança é dada por

$2 \times z \times \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$

Determinando:

$n = 125 + 250 + 150 + 100 \ = \ 625$ e $\hat{p} = \frac{125}{625} = 0,2$

Vem:

$$2 \times z \times \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0{,}05264 \Leftrightarrow 2z \times \sqrt{\frac{0{,}2 \times 0{,}8}{625}} = 0{,}05264 \Leftrightarrow 2z \times 0{,}016 = 0{,}05264 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{0{,}05264}{2 \times 0{,}016} \Leftrightarrow z = 1{,}645$$

O que corresponde a um nível de confiança de 90%