

Exame Final Nacional de Matemática Aplicada às Ciências Sociais
Prova 835 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2019

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho | Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

8 Páginas

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente, consoante a situação, todos os elementos relevantes visualizados na sua utilização, como:

- os gráficos obtidos, com os pontos relevantes assinalados (por exemplo, pontos de intersecção de gráficos, pontos de máximos e pontos de mínimos);
 - as linhas relevantes da tabela obtida para a resolução;
 - as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).
-

Formulário

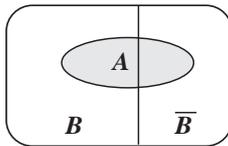
Modelos de grafos

Condição necessária e suficiente para que um grafo conexo admita circuitos de Euler

Um grafo conexo admite circuitos de Euler se e só se todos os seus vértices forem de grau par.

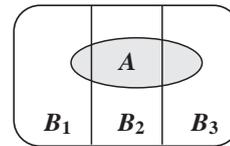
Modelos de probabilidade

Teorema da probabilidade total e regra de Bayes



$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = \\ &= P(B) \times P(A | B) + P(\bar{B}) \times P(A | \bar{B}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B | A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \\ &= \frac{P(B) \times P(A | B)}{P(B) \times P(A | B) + P(\bar{B}) \times P(A | \bar{B})} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) = \\ &= P(B_1) \times P(A | B_1) + P(B_2) \times P(A | B_2) + P(B_3) \times P(A | B_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B_k | A) &= \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} = \\ &= \frac{P(B_k) \times P(A | B_k)}{P(B_1) \times P(A | B_1) + P(B_2) \times P(A | B_2) + P(B_3) \times P(A | B_3)} \end{aligned}$$

podendo k tomar os valores 1, 2 ou 3

Modelo normal

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$$

Intervalos de confiança

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável aleatória normal X , admitindo que se conhece o desvio padrão da variável

$$\left] \bar{x} - z \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right[$$

n – dimensão da amostra
 \bar{x} – média amostral
 σ – desvio padrão da variável
 z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável aleatória X , admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left] \bar{x} - z \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z \frac{s}{\sqrt{n}} \right[$$

n – dimensão da amostra
 \bar{x} – média amostral
 s – desvio padrão amostral
 z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para uma proporção p , admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left] \hat{p} - z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right[$$

n – dimensão da amostra
 \hat{p} – proporção amostral
 z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

(*) Valores de z para os níveis de confiança mais usuais

Nível de confiança	90%	95%	99%
z	1,645	1,960	2,576

1. O Clube de Colecionadores elegeu o seu presidente.

Neste clube, os sócios com mais de 18 anos de idade têm de optar entre duas categorias: Titular ou Efetivo.

Nos Estatutos do Clube está definido o número de votos a que cada sócio tem direito.

Titular – Ao fim do primeiro ano ininterrupto como sócio, tem direito a 2 votos. Por cada 5 anos ininterruptos como sócio, tem direito a mais 1 voto.

Efetivo – Ao fim do primeiro ano ininterrupto como sócio, tem direito a 1 voto. Por cada 10 anos ininterruptos como sócio, tem direito a mais 1 voto.

Apresentaram-se às eleições dois candidatos, a Teresa e o Ricardo.

Apurados os resultados, verificou-se que a Teresa obteve 210 votos, referentes aos 71 sócios que nela votaram.

Na Tabela 1, está registado o número de sócios que votaram no Ricardo, agrupados por categoria e por antiguidade de associado.

Tabela 1

Anos como Sócio	Titular	Efetivo
[1, 5[4	1
[5, 10[6	2
[10, 15[30	11
[15, 20[12	3

Verifique se é verdadeira a afirmação seguinte:

«Apesar de o número de sócios que votaram no Ricardo ser menor do que o número de sócios que votaram na Teresa, o Ricardo venceu as eleições.»

Na sua resposta, apresente todos os cálculos que efetuar.

2. A Teresa arrematou um quadro num leilão.

Admita que o valor de mercado do quadro, em euros, t trimestres após o momento em que a Teresa o arrematou, é dado por

$$V(t) = \frac{1000}{1 + 4e^{-0,2t}} \quad (t \geq 0)$$

2.1. A Teresa considera a compra um bom investimento se o quadro se valorizar, pelo menos, 30%, seis meses após ter sido arrematado.

Terá sido a compra do quadro um bom investimento?

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve duas casas decimais.

2.2. Com o passar do tempo, o valor de mercado do quadro tende a estabilizar num certo valor. A Teresa vendeu o quadro por um preço 40 euros abaixo desse valor.

Determine durante quantos meses a Teresa manteve o quadro na sua posse.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Para responder a esta questão, recorra às capacidades da sua calculadora e apresente:

- o(s) gráfico(s) que lhe permite(m) resolver o problema;
- as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s), com arredondamento às décimas.

3. O Clube de Colecionadores dispõe de três espaços (E1, E2 e E3), de diferentes dimensões, que aluga para a exposição de coleções.

Três sócios, A, B e C, pretendem alugar os três espaços durante o mesmo período de tempo. Como não chegam a acordo sobre a distribuição dos espaços, o Clube decide aplicar o método seguinte, tanto para a distribuição dos espaços como para o apuramento do valor a pagar pelo seu aluguer.

- Cada sócio propõe, secretamente, o valor a pagar pelo aluguer de cada um dos espaços, colocando o registo dos valores das suas licitações dentro de um envelope fechado. Em seguida, os envelopes são abertos e os valores das licitações dos três sócios são registados numa tabela.
- Determina-se o valor global atribuído por cada sócio aos espaços e o valor que cada um considera justo pagar pelo aluguer, considerando-se que este valor é igual a um terço do valor global que ele atribuiu aos três espaços.
- Cada espaço é destinado ao sócio que mais o valoriza, e considera-se que o valor do aluguer é, provisoriamente, o valor monetário que o sócio atribuiu ao respetivo espaço.
- Se o valor que o sócio se propõe pagar pelo aluguer do espaço ultrapassar o que ele considera justo pagar, apura-se o excedente. Caso contrário, apura-se o défice.
- Após os procedimentos anteriores, o valor correspondente à diferença entre o valor total do excedente e o valor total do défice é descontado, em partes iguais, ao valor que cada sócio considera justo pagar, apurando-se assim o valor final a pagar por cada um dos três sócios pelo aluguer do espaço que lhe é destinado.

Na Tabela 2, estão registados os valores, em euros, atribuídos por cada um dos sócios aos espaços E1, E2 e E3, nas licitações secretas.

Tabela 2

Sócios \ Espaços	Espaços		
	E1	E2	E3
A	150	211	158
B	249	252	120
C	200	258	145

Determine o valor de aluguer que cada um dos sócios terá de pagar pelo espaço que lhe é destinado, de acordo com o método acima descrito.

4. O Clube de Colecionadores possui um espaço próprio para exposições.

Na Figura 1, apresenta-se uma planta simplificada do referido espaço, que é composto por um Átrio e seis salas: S1, S2, S3, S4, S5 e S6.

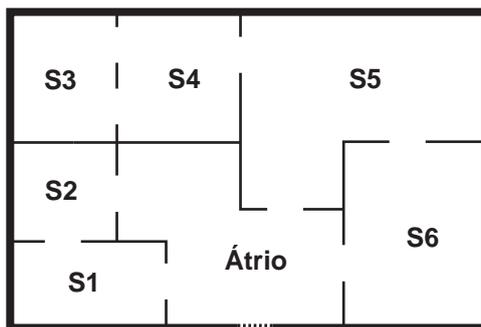


Figura 1

O presidente do Clube pretendia inicialmente definir um percurso, com início e fim no Átrio, cruzando todas as portas e entrando em todas as salas, sem cruzar nenhuma porta mais de uma vez.

Tendo verificado que o seu objetivo não podia ser posto em prática, e como o espaço será alvo de remodelação, o presidente decidiu que uma das intervenções a levar a cabo seria eliminar uma das portas existentes ou acrescentar uma nova porta para viabilizar o seu objetivo.

Indique, justificando, qual terá sido a intervenção decidida pelo presidente (se eliminou uma porta ou acrescentou uma porta, e entre que salas).

Na sua resposta, apresente um grafo que modele a situação descrita.

5. O Daniel fez uma coleção de cromos.

5.1. Nessa coleção, algumas das carteiras de cromos continham um vale de oferta, que podia ser de dois tipos: um vale de cinco carteiras grátis ou um vale de uma carteira grátis.

Admita que as carteiras de cromos obtidas através dos vales de oferta nunca contêm novos vales de oferta.

O Daniel comprou 10 carteiras de cromos, e todas elas continham um vale de oferta.

Qual dos valores seguintes pode representar o número de carteiras grátis que o Daniel obteve graças a estes vales de oferta?

(A) 11

(B) 13

(C) 15

(D) 18

5.2. A coleção é composta por 485 cromos, sendo alguns deles dourados; os cromos devem ser colados numa caderneta própria, oferecida para o efeito.

O Daniel comprou 131 carteiras, a 90 cêntimos cada, mas, graças aos vales de oferta, conseguiu reunir um total de 750 cromos. Destes, 46% eram cromos repetidos, não dourados. Como os cromos que lhe faltavam eram todos dourados, conseguiu trocar cada 5 dos seus cromos repetidos por um cromo dourado.

Depois de efetuadas as trocas, encomendou, *online*, os cromos em falta, tendo pago 25 cêntimos por cromo e 2 euros em portes de envio.

Quanto gastou o Daniel para fazer a coleção?

Apresente todos os cálculos que efetuar.

6. Uma leiloeira vende diversos artigos, entre os quais peças do espólio do Clube de Colecionadores.

6.1. No último leilão, uma das peças colocadas à venda obteve 10 licitações.

Na Figura 2, apresenta-se o diagrama de caule e folhas referente ao valor, em euros, de 9 dessas licitações.

O algarismo das dezenas de cada licitação é indicado no caule, e o algarismo das unidades é indicado nas folhas.

1	4	6	
2	2		
3	1	2	7
4	5	8	
5	0		

Figura 2

Admita que o valor médio das 10 licitações foi 34 euros.

Qual o valor da licitação em falta?

- (A) 45 euros (B) 41 euros (C) 31 euros (D) 11 euros

6.2. A leiloeira regista os valores de venda dos artigos leiloados e, no final de cada mês, analisa-os.

Na Figura 3, estão representados os diagramas de extremos e quartis relativos aos valores de venda, em euros, referentes a alguns meses.

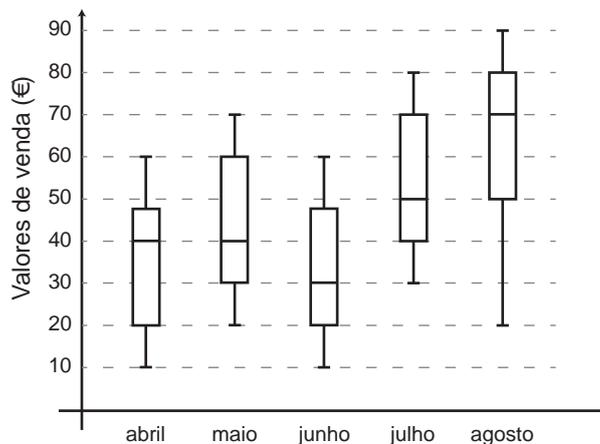


Figura 3

6.2.1. Admita que o número de artigos vendidos pela leiloeira a um preço máximo de 60 euros, no mês de maio, foi 48.

Determine o número de artigos, vendidos nesse mês, cujo valor de venda tenha sido, no mínimo, 40 euros.

6.2.2. No período de tempo correspondente ao gráfico da Figura 3, a leiloeira vendeu seis peças do Clube de Colecionadores.

Em abril, vendeu uma peça pelo valor da mediana e outra pelo valor mínimo. Em julho, vendeu uma peça pelo valor do primeiro quartil e outra pelo valor do terceiro quartil. Em agosto, vendeu duas peças pelo valor máximo.

Qual foi o valor obtido com estas vendas?

7. Foi realizado um estudo estatístico junto dos sócios do Clube de Colecionadores.

7.1. Admita que se concluiu que a idade dos sócios segue uma distribuição normal, de valor médio 35 anos e desvio padrão 5 anos.

Seleciona-se um sócio ao acaso.

A probabilidade, com arredondamento às décimas, de o sócio ter idade superior a 45 anos é:

(A) 0,3% (B) 2,3% (C) 4,3% (D) 4,6%

7.2. De entre os sócios do Clube de Colecionadores, sabe-se que 45% são mulheres.

Considere que o Clube tem 180 sócios do sexo feminino e que a percentagem de sócios que não são Efetivos do sexo masculino é 25%.

Determine o número de sócios que não são Efetivos ou que são mulheres.

7.3. Admita que:

- 45% dos sócios do Clube são Efetivos;
- 70% dos sócios do Clube participam em leilões;
- 7 sócios em cada 20 não são Efetivos e participam em leilões.

Escolhe-se, ao acaso, um sócio.

Determine a probabilidade de o sócio não participar em leilões, sabendo-se que é sócio Efetivo.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

8. Num encontro de colecionadores de jogos, verificou-se que, numa amostra de 200 colecionadores, 45 colecionavam jogos de tabuleiro.

Determine um intervalo de confiança a 90% para a proporção de colecionadores de jogos de tabuleiro presentes no encontro.

Apresente os extremos do intervalo de confiança, em percentagem, com arredondamento às décimas.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve quatro casas decimais.

FIM

COTAÇÕES

Item														TOTAL
Cotação (em pontos)														
1.	2.1.	2.2.	3.	4.	5.1.	5.2.	6.1.	6.2.1.	6.2.2.	7.1.	7.2.	7.3.	8.	
16	16	16	16	16	8	16	8	16	16	8	16	16	16	200