REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática B

Prova 735 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2021

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

A prova inclui 7 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 7 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 5 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos visualizados na sua utilização, mais precisamente, consoante a situação:

- os gráficos obtidos, com os pontos relevantes para a resolução assinalados (por exemplo, pontos de intersecção de gráficos, pontos de máximos e pontos de mínimos);
- as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r}{180}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: $\textit{Semiperímetro} \times \textit{Apótema}$

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r^2}{360}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r – raio)

Área lateral de um cilindro reto: $2 \pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Cilindro: $\textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

- **Progressão aritmética:** $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$
- **Progressão geométrica:** $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Probabilidades e Estatística

Se X é uma variável aleatória discreta de valores x_i com probabilidade p_i, então:

- **Valor médio** de X:
  $\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$
- **Desvio padrão** de X:
  $\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é uma variável aleatória normal de valor médio μ e desvio padrão σ, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

*** 1.** Um barco de pesca captura três espécies de peixe: cavala, sardinha e carapau.

Numa pescaria, foram pescados $640\ \mathrm{kg}$ de cavala, $240\ \mathrm{kg}$ de sardinha e $390\ \mathrm{kg}$ de carapau.

O peixe é vendido em lotes de dois tipos: A e B.

Cada lote A é constituído por $40\ \mathrm{kg}$ de cavala, $4\ \mathrm{kg}$ de sardinha e $20\ \mathrm{kg}$ de carapau.

Cada lote B é constituído por $16\ \mathrm{kg}$ de cavala, $12\ \mathrm{kg}$ de sardinha e $15\ \mathrm{kg}$ de carapau.

Cada lote A é vendido a 180 euros e cada lote B é vendido a 160 euros.

Determine o número de lotes A e o número de lotes B que se devem vender, de modo a obter o valor máximo com a venda desses lotes, nas condições referidas.

Na sua resposta, designe por x o número de lotes A e por y o número de lotes B a vender, e apresente:
- a função objetivo;
- as restrições do problema;
- uma representação gráfica referente ao sistema de restrições;
- o valor de x e o valor de y correspondentes à solução do problema.

2. Num estudo sobre uma população de carapaus, concluiu-se que o comprimento, C, em centímetros, de um carapau dessa população é dado, em função de t, aproximadamente, por

$$C(t) = 42\left(1 - e^{-0,1056t - 0,4222}\right) \quad , \quad \text{com} \quad t \geq 1$$

em que t representa a idade, em anos, do carapau.

2.1. De acordo com o modelo apresentado, quantos centímetros cresce um carapau dessa população durante o segundo ano de vida?

Apresente o resultado arredondado às décimas.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

*** 2.2.** Admita que a massa, M, em gramas, de um carapau dessa população, com C centímetros de comprimento, é dada, aproximadamente, por

$$M(C) = 0,0084 \times C^3 \quad , \quad \text{com} \quad C \geq 18$$

Determine a idade de um carapau dessa população cuja massa é 400 gramas, de acordo com os dois modelos apresentados.

Apresente o resultado em anos e meses, com o número de meses arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

3. Ao largo da costa portuguesa, perto de Viana do Castelo, está em desenvolvimento um dos maiores parques flutuantes do mundo para captação de energia eólica. A central deste parque começou a injetar energia na rede elétrica no final de 2019.

A potência útil de uma torre eólica depende, entre outros fatores, da velocidade do vento. Devido a questões técnicas, a partir de um determinado valor da velocidade do vento, por mais que esta aumente, não se permite que a potência aumente, estabilizando-a num determinado valor, para que seja possível injetar a energia gerada na rede elétrica.

O gráfico representado na Figura 1 relaciona a potência útil, P, em kW, de uma torre eólica com a velocidade, v, em m/s, do vento que faz girar as hélices da torre, para $v > 3$.

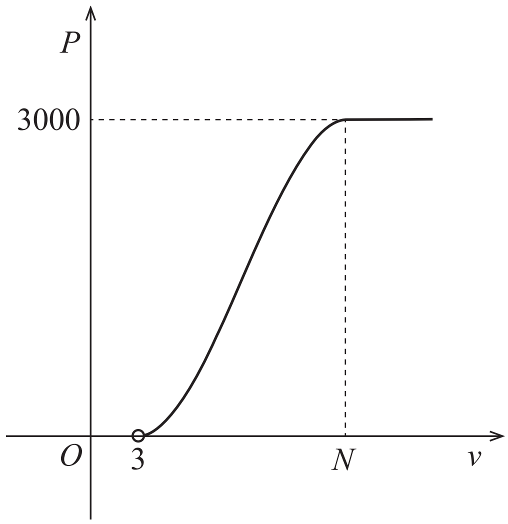

Figura 1

De acordo com o gráfico, a potência útil, P, desta torre:

- é crescente até $3000\ \text{kW}$, para valores da velocidade do vento a partir de $3\ \text{m/s}$ até um determinado valor, N, do qual se sabe ser **superior** a $15\ \text{m/s}$;
- é igual a $3000\ \text{kW}$, para valores da velocidade do vento a partir de N.

Admita que, para $3 < v \leq N$, a potência útil, P, em kW, é dada por

$$P(v) = -2{,}731\,v^3 + 77{,}834\,v^2 - 393{,}264\,v + 553{,}023$$

3.1. Determine o valor de N.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

*** 3.2.** Determine o valor da taxa de variação média da função P no intervalo $[5, 15]$ e interprete-o no contexto descrito.

Apresente o valor da taxa de variação média arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, uma casa decimal.

3.3. Seja T a função que dá a taxa de variação instantânea da função P, para cada valor de v.

Qual é o valor da função T quando $v > N$?

Justifique a sua resposta.

4. Em Portugal, existem empresas que organizam passeios de barco pela costa. Quando estava de férias, a Mariana comprou, a uma dessas empresas, um bilhete para fazer um passeio.

* **4.1.** Admita que a variável aleatória, Y, «duração de uma viagem de autocarro desde o hotel onde a Mariana está alojada até ao ancoradouro onde se apanha o barco» segue, aproximadamente, uma distribuição normal de valor médio 20 minutos e desvio padrão 4 minutos.

O autocarro em que a Mariana viajou saiu do hotel às 8 horas e 32 minutos.

A chegada do autocarro ao ancoradouro está prevista para as 9 horas.

Determine a probabilidade de o autocarro chegar ao ancoradouro antes da hora prevista.

Apresente o resultado em percentagem, arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, cinco casas decimais.

4.2. A empresa vendeu três tipos de bilhete para o passeio de barco:

- tipo 1 – só a viagem;
- tipo 2 – a viagem com almoço;
- tipo 3 – a viagem com almoço e audioguia.

Seja X a variável aleatória «preço, em euros, de um bilhete vendido para o passeio, tomado ao acaso», cuja tabela de distribuição de probabilidades é

x_i	$14{,}20$	a	$20{,}50$
$P(X = x_i)$	$0{,}55$	$0{,}25$	b

em que a representa o preço, em euros, de um bilhete do tipo 2 e b representa um valor de probabilidade.

Sabe-se que o valor médio da variável aleatória X é $16{,}76$ euros.

Determine o preço, em euros, de um bilhete do tipo 2.

5. Uma ponte, idêntica à da fotografia da Figura 2, tem uma torre central e duas torres laterais, cada uma destas à distância de 1000 metros da torre central. A torre central é mais alta do que as torres laterais, e estas têm a mesma altura.

Do topo da torre central para o topo de cada uma das torres laterais estão fixos, no total, 4 cabos retilíneos iguais.

Entre cada um desses 4 cabos e o tabuleiro da ponte, existem cabos verticais, de 25 em 25 metros, perpendiculares ao tabuleiro, que o sustentam.

A Figura 3, que não está à escala, representa a situação relativa a um dos 4 cabos retilíneos fixos na torre central.

Figura 2

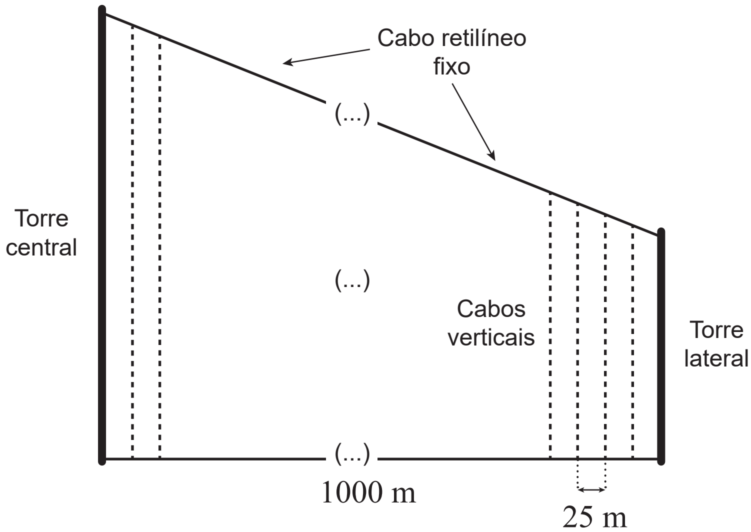

Figura 3

Seja (u_n) a sequência dos comprimentos dos cabos verticais, do menor para o maior, relativa à Figura 3, definida por

$$u_n = 2n + 45$$

em que n é a ordem do termo u_n da sequência.

* **5.1.** Algum dos cabos verticais tem 100 metros de comprimento?

Justifique a sua resposta.

5.2. Determine a soma dos comprimentos de todos os cabos verticais usados para sustentar o tabuleiro da ponte.

6. O penúltimo rei de Portugal, D. Carlos I, era um apaixonado pela oceanografia e por barcos. Com grande talento para a pintura, deixou várias aguarelas ligadas ao mar.

A Figura 4 é uma fotografia de uma dessas aguarelas.

Figura 4

A partir das velas do barco da Figura 4, um desenhador está a estudar um logotipo composto por dois triângulos, que representou a sombreado, em referencial ortogonal e monométrico, Oxy, tal como mostra a Figura 5.

Nesta figura:

- a circunferência tem centro no ponto O;
- os pontos $A(1, 0)$ e $D(-1, 0)$ pertencem à circunferência;
- o ponto M é o ponto médio do segmento de reta $[OA]$;
- a reta r é tangente à circunferência no ponto A;
- os pontos B e C deslocam-se na reta r, de tal forma que $[MB]$ é sempre paralelo a $[OC]$.

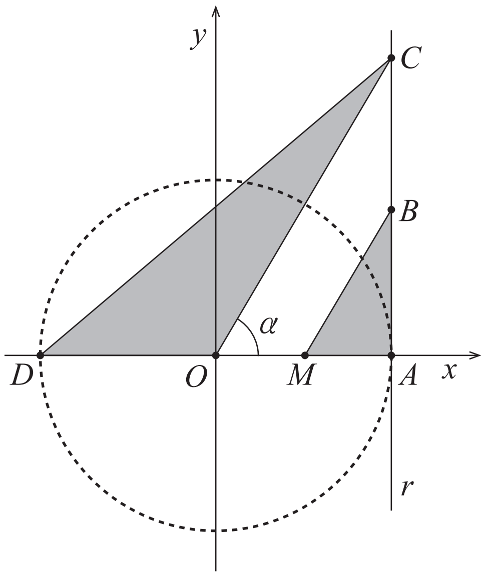

Figura 5

Para cada posição do ponto C, seja α a amplitude, em graus, do ângulo AOC, com

$$40^{\circ} \leq \alpha \leq 70^{\circ}$$

A unidade de medida de comprimento é o metro.

*** 6.1.** Mostre que a soma, T, das áreas dos triângulos $[DOC]$ e $[MAB]$, em metros quadrados, é dada, em função de α, por

$$T(\alpha) = \frac{5\,\text{tg}(\alpha)}{8}$$

6.2. Determine o menor e o maior dos valores inteiros de α para os quais a soma, T, das áreas dos triângulos $[DOC]$ e $[MAB]$ é superior a 1 m^2.

Note que a soma, T, das áreas dos triângulos $[DOC]$ e $[MAB]$, em metros quadrados, é dada, em função de α, por $T(\alpha) = \dfrac{5\,\text{tg}(\alpha)}{8}$.

6.3. Considere $\alpha = 45^{\circ}$.

Determine a equação reduzida da reta DC.

Na sua resposta, comece por obter as coordenadas do ponto C.

*** 7.** No início do século XX, um navio aportou numa ilha com o objetivo de comprar cereais. Nessa ilha, era hábito colocar os cereais numa vasilha de forma esférica.

Um comerciante vendia vasilhas que anunciava estarem cheias com 2600 dm^3 de cereal cada uma.

Para verificar a capacidade de uma dessas vasilhas, o comandante do navio dispunha apenas de um bloco de madeira, com a forma de um paralelepípedo, de 2 dm de altura, graduado na face superior, como sugere a Figura 6.

O comandante encostou o bloco de madeira à esfera, como se ilustra na Figura 7, e mediu a distância representada por d.

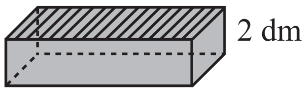

Figura 6

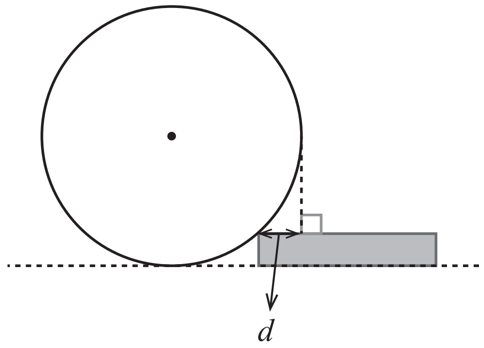

Figura 7

A Figura 8 é um esquema de um corte vertical que passa pelo centro da esfera e pelo ponto da esfera tangente ao solo, e que contém o ponto de contacto do bloco com a esfera.

Neste esquema, que não está à escala:

- O é o centro da esfera;
- $[OD]$ é um raio horizontal da esfera, com $\overline{OD} = r \text{ dm}$;
- $[DC]$ é perpendicular a $[OD]$;
- $[OF]$ e $[EB]$ são paralelos a $[DC]$;
- $[AB]$ representa a altura do bloco, com $\overline{AB} = 2 \text{ dm}$;
- $\overline{BC} = d = 3 \text{ dm}$.

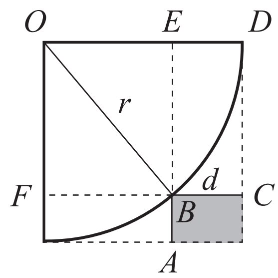

Figura 8

Apenas com estas duas medidas, o comandante calculou a capacidade da esfera e afirmou que a vasilha não podia conter 2600 dm^3 de cereal.

Averigue se a afirmação do comandante estava correta.

Na sua resposta, determine a capacidade da esfera, considerando desprezável a sua espessura.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 7 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	1.	2.2.	3.2.	4.1.	5.1.	6.1.	7.	Subtotal
Cotação (em pontos)	20	20	16	16	16	16	16	**120**
Destes 7 itens contribuem para a classificação final da prova os 5 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**2.1.**	**3.1.**	**3.3.**	**4.2.**	**5.2.**	**6.2.**	**6.3.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	5 x 16 pontos							**80**
TOTAL								**200**