

**PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE
MATEMÁTICA B DO ENSINO SECUNDÁRIO
(CÓDIGO DA PROVA 735) – 1ª FASE – 13 DE JULHO 2021**

1.

1.1. É fácil verificar que $t = 20$ corresponde ao ano 2017 :

Temos então que:

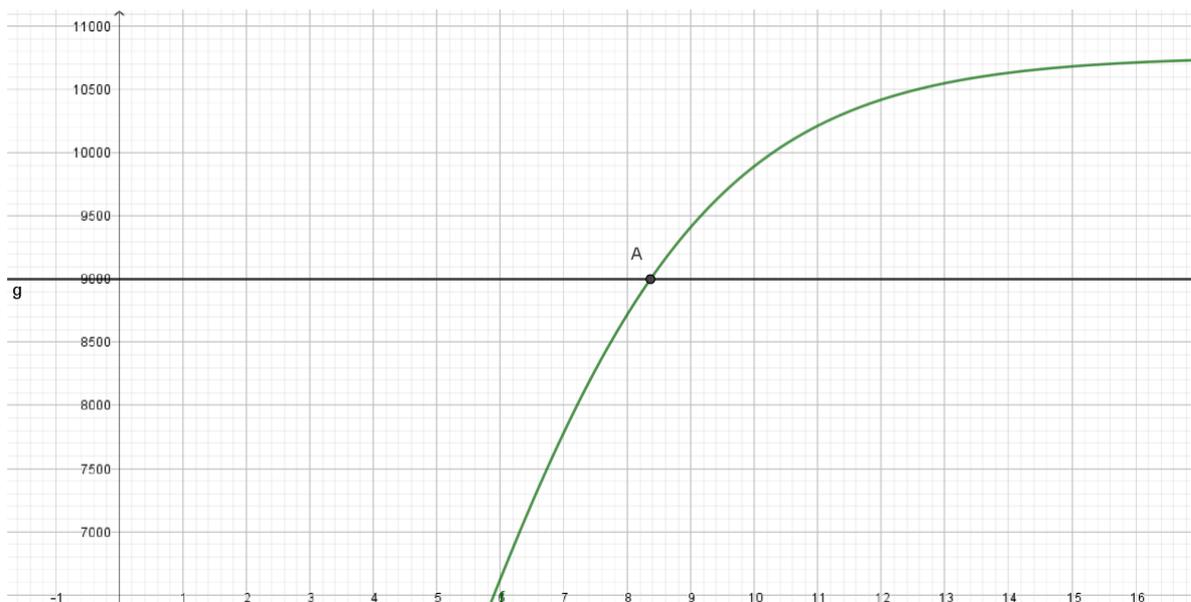
$$G(20) = \frac{10765.05}{1 + 11.81e^{-0.49 \times 20}}$$

$$G(20) \approx 10758$$

t	ano
0	1997
1	1998
...	...
20	2017

Resposta: Em 2017 o consumo energético anual, em gás natural das famílias portuguesas foi de 10 758 TJ.

1.2. Usemos as capacidades da calculadora gráfica para determinar a interseção do gráfico da função que permite definir o consumo energético anual e a reta horizontal, definida por $y = 9000$, por forma a resolver a inequação $G(t) > 9000$:



A interseção dos dois gráficos é o ponto A, cujo valor aproximado da abcissa é 8.36, pelo que o consumo será superior a 9000 TJ a partir de $t = 9$, o que corresponde ao ano 2006.

Resposta: O consumo energético anual, em gás natural, passou a ser superior a 9000 a partir do ano de 2006.

2.

2.1. De acordo com os dados apresentados podemos calcular o valor a pagar em cada uma das empresas.

Empresa A

$$30 \times 0.1336 + 325 \times 0.0479 \\ = 19.5755 = 19,58 \text{ €}$$

Empresa B

$$30 \times 0 + 325 \times 0.0586 \\ = 19.045 = 19,05 \text{ €}$$

Resposta: De acordo com os cálculos apresentados, o valor a pagar pelo gás natural teria sido menor na empresa B.

2.2. De acordo com os dados apresentados definimos a função f , para a empresa A, e a função g , para a empresa B.

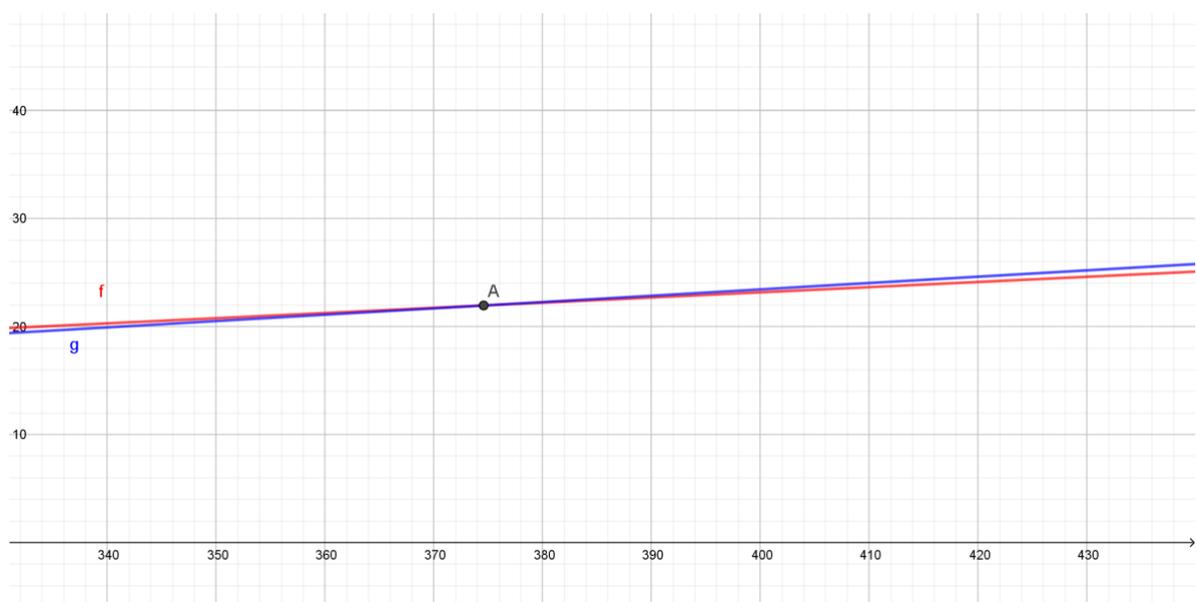
$$f(x) = 30 \times 0.1336 + 0.0479x$$

$$f(x) = 4.008 + 0.0479x$$

$$g(x) = 30 \times 0 + 0.0586x$$

$$g(x) = 0.0586x$$

Usemos a calculadora gráfica para visualizarmos os gráficos das duas funções:



Os dois gráficos interseitam-se no ponto A, de abcissa $x \approx 374,58$ o que nos permite concluir que $f(x) < g(x) \Leftrightarrow x > 375$.

Resposta: A empresa A é mais favorável para consumos a partir dos 375 kWh

Também podíamos ter optado por uma resolução algébrica para chegar à mesma conclusão:

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow 4.008 + 0.0479x < 0.0586x$$

$$\Leftrightarrow 0.0479x - 0.0586x < -4.008 \Leftrightarrow -0.0107x < -4.008$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{-4.008}{-0.0107} \Leftrightarrow x > 374,5794$$

3.

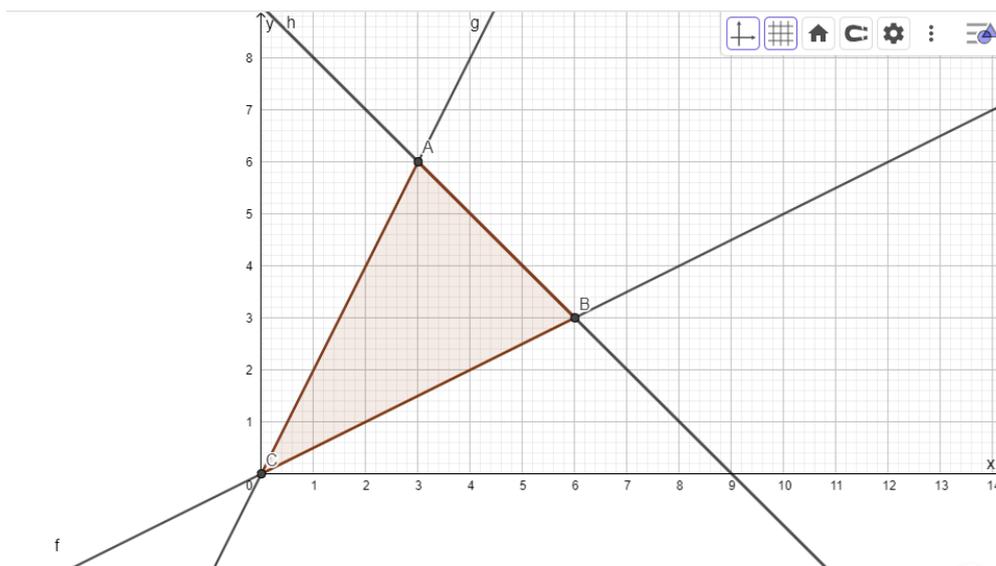
A função objetivo que pretendemos maximizar é :

$L(x) = 3x + 4y$, sendo x a quantidade de cogumelos (kg) e y a quantidade de espargos (kg)

Restrições do problema:

$$\begin{cases} x \leq 2y \\ y \leq 2x \\ x + y \leq 9 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq \frac{x}{2} \\ y \leq 2x \\ y \leq -x + 9 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Construindo a região das soluções admissíveis obtemos o seguinte gráfico, sendo as coordenadas dos pontos A e B, (3, 6) e (6, 3), respetivamente.



Determinando as intersecções correspondentes aos vértices da região admissível, averiguamos a solução ótima.

x	y	$L(x) = 3x + 4y$
3	6	33 - solução ótima
6	3	30

Resposta: O lucro é máximo se forem cultivados 3 quilogramas de cogumelos e 6 quilogramas de espargos.

4.

4.1. Como a altura do ponto P é dada diretamente pela função h , basta resolver a equação

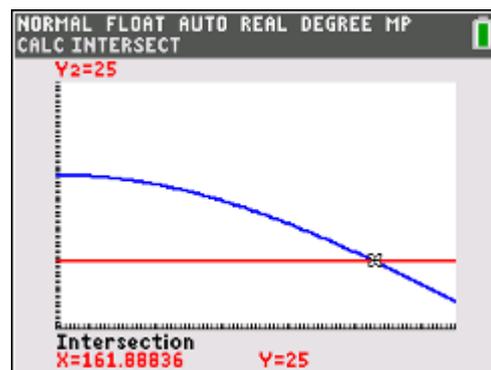
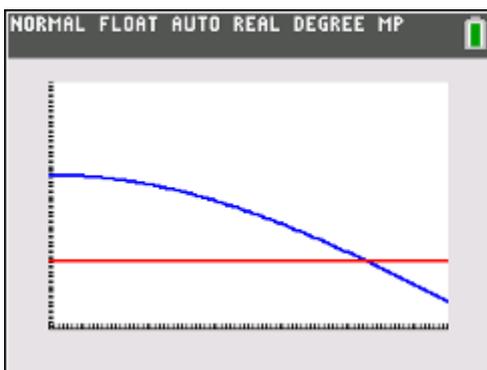
$$h(\alpha) = 25$$

Usemos a calculadora gráfica para a resolver, tendo em conta que α , em graus, é tal que

$$90 \leq \alpha \leq 180$$

Definimos as funções

$$y_1 = 46 \sin(x) + 10,7 \quad \text{e} \quad y_2 = 25 \quad \text{e determinamos a sua interseção.}$$



Assim, o ângulo pedido é $\alpha \approx 161,89^\circ$

Resposta: $\alpha = 162^\circ$

4.2. $h(\alpha) = 46 \operatorname{sen}(\alpha) + 10,7$

Considerando $\alpha = 90^\circ$ (tabuleiro aberto), temos

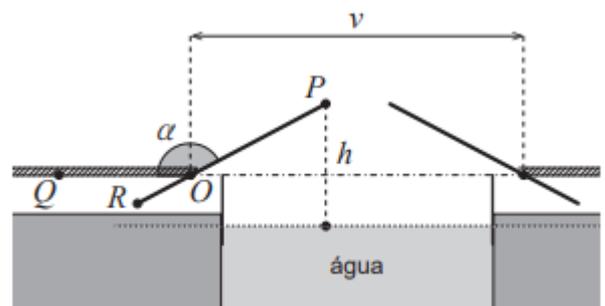
que:

$$h(90^\circ) = 46 \operatorname{sen}(90^\circ) + 10,7 = 56,7 \text{ m}$$

Considerando $\alpha = 180^\circ$ (tabuleiro fechado),

temos que:

$$h(180^\circ) = 46 \operatorname{sen}(180^\circ) + 10,7 = 10,7 \text{ m}$$



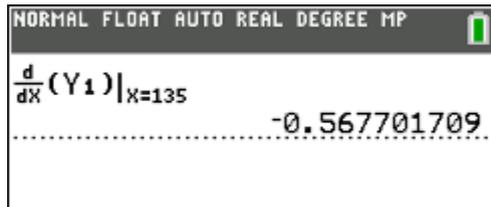
Assim, como os dois tabuleiros são geometricamente iguais, podemos concluir que metade do comprimento do vão é dado por

$$h(90^\circ) - h(180^\circ) = 46 \text{ m}, \text{ pelo que o vão da ponte tem um comprimento de } 2 \times 46 = 92 \text{ m}.$$

Resposta: o vão da ponte tem um comprimento de 92 m

4.3. A taxa de variação instantânea é dada pela função derivada de h .

Utilizando a calculadora e fazendo $y_1 = 46 \sin(x) + 10,7$, podemos obter o valor de $T(135)$:



Assim, podemos dar a

Resposta: o valor da taxa de variação instantânea é $T(135) \approx -0,57$ o que significa que a altura em relação ao nível da água, quando $\alpha = 135^\circ$, está a diminuir (a taxa é negativa) à razão aproximada de 57 cm por grau.

5.

5.1. Vamos recorrer à calculadora gráfica para determinarmos os valores dos parâmetros da equação da reta r . Para isso, colocamos numa lista as abcissas dos pontos do diagrama de dispersão, os valores registados da temperatura ambiente, e noutra lista as ordenadas dos pontos, ou seja, os valores registados relativamente ao número de pulsos por segundo.

The image shows a graphing calculator screen with a list of data points. The columns are labeled A (x), B (y), C, and D. The data points are:

	A x	B y	C	D
=				
1	16	41		
2	17.5	45		
3	18.5	50		
4	19	53		
5	21	60		

Recorrendo à regressão linear, obtemos os parâmetros da reta de regressão linear de equação $y = mx + b$, sendo $m \approx 3,21$ e $b \approx -8,41$.

The image shows a graphing calculator screen displaying the results of a linear regression. The columns are labeled C, D, E, and F. The data is as follows:

	C	D	E	F
=				=LinRegM
1		Título	Regress...	
2		RegEqn	m*x+b	
3		m	3.21426	
4		b	-8.41005	
5		r ²	0.981313	

At the bottom, it shows the equation: E1 = "Regressão linear (mx+b)"

Vamos então usar a equação da reta de regressão linear, $y = 3,21x - 8,41$, para estimar o número de pulsos por segundo feitos pelo grilo (y) quando a temperatura ambiente é igual a 22°C ($x = 22$):

$$y = 3,21 \times 22 - 8,41 = 62,21 \approx 62$$

Resposta: Para uma temperatura ambiente de 22°C , estima-se que o número de pulsos por segundo feitos pelo grilo seja 62.

5.2.

5.2.1. Vejamos que é constante a diferença entre dois termos consecutivos da sequência:

$$u_{n+1} - u_n = 6(n+1) - 48 - (6n - 48) = 6n + 6 - 48 - 6n + 48 = 6$$

Assim, como $u_{n+1} - u_n = 6$, não depende de n , concluímos que (u_n) é uma progressão aritmética.

5.2.2. Queremos determinar a soma de 10 termos consecutivos da progressão aritmética, em que o primeiro termo é $u_{20} = 6 \times 20 - 48 = 72$ e o último termo é $u_{29} = 6 \times 29 - 48 = 126$. Assim, o número total de pulsos do grilo ocorridos no conjunto das dez audições é dado por:

$$\frac{72 + 126}{2} \times 10 = 99 \times 10 = 990$$

Resposta: O total de pulsos foi de 990.

6. Para determinarmos o volume que o material de amortecimento ocupa no interior da caixa cúbica, vamos determinar o volume do cubo e subtrair-lhe o volume da esfera.

Sabemos que $D(-10, -10, 10)$ pelo que, de acordo com os dados do enunciado, $C(-10, 10, 10)$ e o cubo tem 20cm de aresta. Como a esfera está inscrita no cubo, de acordo com os dados do enunciado, o raio da esfera é de 10cm.

Assim:

$$\text{Volume do cubo} = 20^3 = 8000 \text{ cm}^3$$

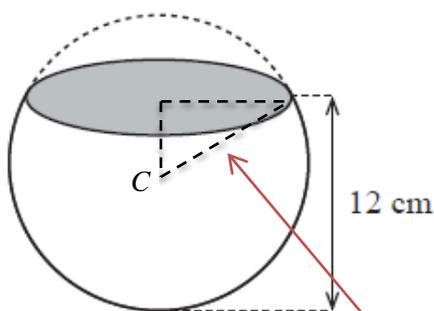
$$\text{Volume da esfera} = \frac{4}{3} \times \pi \times 10^3 \approx 4188,7902 \text{ cm}^3$$

pelo que o volume que o material de amortecimento ocupa no interior da caixa cúbica é de $8000 - 4188,7902 \approx 3811 \text{ cm}^3$.

Resposta: o volume que o material de amortecimento ocupa é de 3811 cm^3

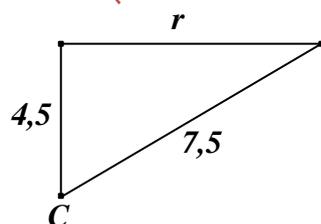
7.

Por ser útil vamos considerar o esquema apresentado na figura 8 do enunciado da prova.



Para determinar o perímetro da abertura circular do vaso precisamos de determinar o seu raio, a que vamos chamar r . Sabemos também que o raio da superfície esférica, de que o vaso é parte, mede 7,5 cm, o que nos permite concluir que a distância do centro da superfície esférica ao plano da abertura do vaso é $12 - 7,5 = 4,5$

Usemos então outro esquema com os dados que já temos, onde o ponto C representa o centro da superfície esférica:



Vamos agora utilizar o Teorema de Pitágoras para determinar o valor de r :

$$\begin{aligned} r^2 + 4,5^2 &= 7,5^2 \Leftrightarrow r = \sqrt{7,5^2 - 4,5^2} \quad (\text{porque } r > 0) \\ &\Leftrightarrow r = \sqrt{36} \Leftrightarrow r = 6 \end{aligned}$$

Ora, sendo assim, temos a

Resposta: o perímetro da abertura do vaso é $2\pi \times 6 = 12\pi \approx 37,7$ cm.

8.

Sabemos que a curva da distribuição normal é simétrica em relação ao valor médio. Como o valor médio é 65 e $50 = 65 - 15$ e $80 = 65 + 15$ temos que $P(X < 50) = P(X > 80)$.

Por outro lado, como $P(50 < X < 80) = 0,7$, vamos ter que $P(X < 50) = P(X > 80) = \frac{0,3}{2} = 0,15$.

Atendendo agora a esta distribuição de probabilidade, podemos deduzir a quantidade expectável de batatas-semente que existem em cada um dos intervalos de massa, no conjunto das 2000:

Massa da batata-semente	Menor do que 50	Entre 50 e 80	Maior do que 80
Número de batatas	$0,15 \times 2000 = 300$	$0,7 \times 2000 = 1400$	$0,15 \times 2000 = 300$

Tendo em conta os dados do problema, designadamente a massa das batatas produzidas por cada batata-semente e a massa total temos que:

$$0.8 \times 300 + m \times 1400 + 1.5 \times 300 = 2230 \Leftrightarrow 240 + 1400m + 450 = 2230$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{2230 - 690}{1400} \Leftrightarrow m = 1.1$$

Resposta: $m = 1,1$

FIM