Associação de Professores de Matemática
Contactos:
Rua Dr. João Couto, n.º 27-A
1500-236 Lisboa
Tel.: +351 21 716 36 90 / 21 711 03 77
Fax: +351 21 716 64 24
http://www.apm.pt
email: geral@apm.pt

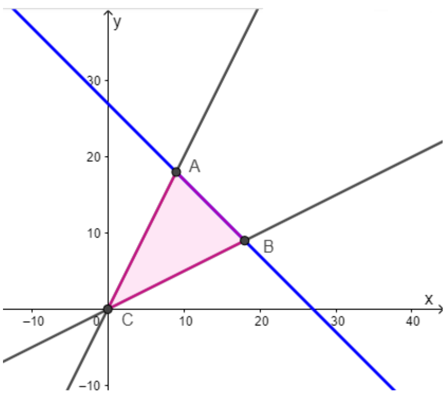
PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA B DO ENSINO SECUNDÁRIO

(CÓDIGO DA PROVA 735) – 1ª FASE – 15 DE JULHO 2020

1. A função objetivo que pretendemos maximizar é: $L(x) = 1000x + 2000y$. As restrições do problema são:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 27 \\ x \leq 2y \\ y \leq 2x \end{cases}$$

Construindo a região das soluções admissíveis obtemos:



Determinando as intersecções correspondentes aos vértices da região admissível, averiguamos a solução ótima:

(x, y)	$L(x, y)$	
$A(9, 18)$	$L(9{,}18) = 1000 \times 9 + 2000 \times 18 = 45000$	← Solução ótima!
$B(18, 9)$	$L(18{,}9) = 1000 \times 18 + 2000 \times 9 = 36000$	

Desta forma, para obter o lucro máximo a empresa deve enviar ao cliente 9 toneladas de trigo e 18 toneladas de centeio.

2.

2.1.

O número de passos dados pelo João representam uma progressão aritmética de razão 710 e primeiro termo 3168 ($u_1 = 3168$). Logo, o número de passos dados pelo João nos dias seguintes pode ser obtido através da expressão $u_n = 3168 + 710 \times (n-1)$.

O número de passos dados pela Maria representam uma progressão aritmética de razão 625 e primeiro termo 4358 ($v_1 = 4358$). Logo, o número de passos dados pela Maria nos dias seguintes pode ser obtido através da expressão $v_n = 4358 + 625 \times (n-1)$.

No dia que eles dão o mesmo número de passos $u_n = v_n$.

$$\begin{aligned} u_n = v_n &\Leftrightarrow 3168 + 710 \times (n-1) = 4358 + 625 \times (n-1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3168 + 710n - 710 = 4358 + 625n - 625 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2458 + 710n = 3733 + 625n \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 710n - 625n = 3733 - 2458 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 85n = 1275 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow n = 15 \end{aligned}$$

Portanto, o João e a Maria deram exatamente o mesmo número de passos no dia 15 de agosto.

2.2.

O número de conchas em cada fila é igual aos termos de uma progressão geométrica de razão 2 e primeiro termo 1 ($u_1 = 1$).

O número total de conchas usadas até a fila k é igual à soma dos k primeiros termos dessa progressão, ou seja, é:

$$u_1 \times \frac{1-r^k}{1-r} = 1 \times \frac{1-2^k}{1-2} = -1 \times \left(1-2^k\right) = -1 + 2^k.$$

Este número, não pode ultrapassar 271.

$-1 + 2^k \leq 271$

Utilizando a calculadora gráfica, podemos observar, através de uma tabela, que o valor seria ultrapassado na fila 9.

Até à fila 8 a Maria utilizou 255 conchas.

$$271 - 255 = 16$$

Logo, sobraram à Maria 16 conchas.

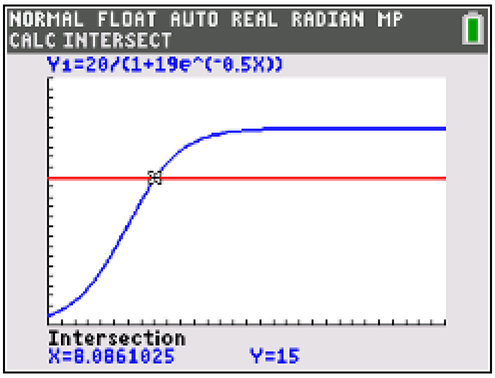
3.

3.1.

Podemos utilizar as capacidades gráficas da calculadora para resolver a equação $P(t)=15$.

Utilizamos para isso a representação gráfica da função P e da reta $y=15$.

A abcissa do ponto de interseção dos dois gráficos corresponde à solução que procuramos:



Podemos então dizer que a população atingiu as 15 toneladas passados 8 anos do instante inicial.

Também poderíamos chegar à mesma solução resolvendo a equação analiticamente:

$$P(t)=15 \Leftrightarrow \frac{20}{1+19e^{-0.5t}}=15$$

$$\Leftrightarrow 15\left(1+19e^{-0.5t}\right)=20 \qquad \text{o denominador nunca se anula}$$

$$\Leftrightarrow 15+15\times 19e^{-0.5t}=20 \Leftrightarrow 285e^{-0.5t}=20-15 \Leftrightarrow e^{-0.5t}=\frac{5}{285}$$

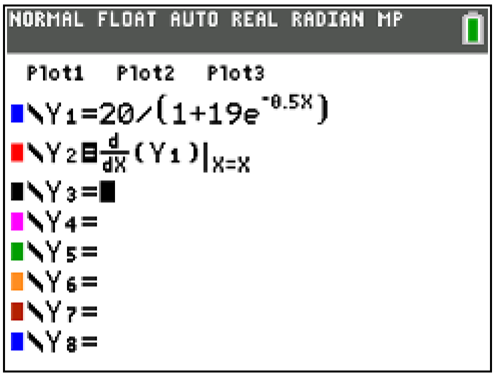
$$\Leftrightarrow -0.5t=\ln\left(\frac{5}{285}\right) \Leftrightarrow t=\frac{\ln\left(\frac{1}{57}\right)}{-0.5} \Leftrightarrow t=8.086\approx 8$$

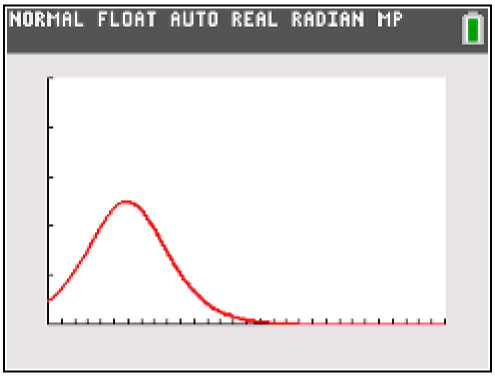
Resposta: 8 anos

3.2.

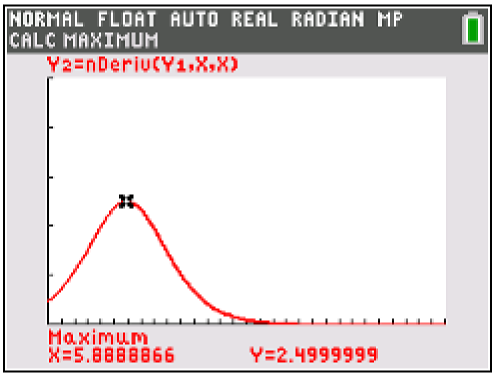
A taxa de variação instantânea é-nos dada em cada instante pela função derivada do modelo $P(t)$ apresentado.

Recorremos às capacidades gráficas da calculadora para representar essa função:





E agora basta-nos encontrar a abcissa do ponto correspondente ao máximo da função derivada:



Podemos observar que a taxa de variação instantânea é máxima para $t \approx 5.889$.

Como $0.889 \times 12 = 10.688$,
podemos concluir que a população de peixes estava a crescer mais rapidamente passados 5 anos e 11 meses após o instante inicial.

3.3.

À medida que o tempo vai aumentando o valor de $e^{-0.5t}$ vai-se aproximando de zero.

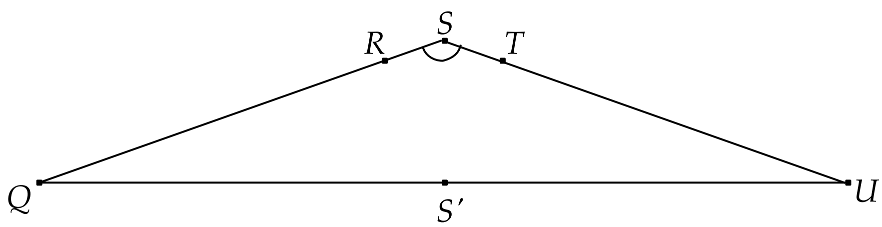
Então o valor dado pelo modelo vai-se aproximando de $\dfrac{20}{1+19\times 0} = 20$.

Dito de outra forma: a reta de equação $y = 20$ é uma assintota horizontal ao gráfico da função $P(t)$ e, por isso, a população de peixes nunca excederá as 20 toneladas.

4.

4.1.

Com base na figura 2 construímos o esquema que nos vai ajudar a resolver o problema:



Como o triângulo [*QSU*] é isósceles vamos considerar o triângulo retângulo [*SS'U*] onde a amplitude α do ângulo *USS'* é metade da do ângulo *QSU*.

Como o ângulo *QSU* é obtuso e $\sin \alpha = 0.5$ podemos concluir que $\alpha = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$ (note-se que o ângulo cujo seno é 0,5 tem amplitude 30º).

Então temos que:

a amplitude do ângulo *SS'U* é de $150 \div 2 = 75^{\circ}$

$$\overline{S'U} = \frac{2,3}{2} = 1,15$$

$$\sin 75^{\circ} = \frac{\overline{S'U}}{\overline{SU}} \Leftrightarrow \overline{SU} = \frac{1,15}{\sin 75^{\circ}} \Leftrightarrow \overline{SU} \approx 1,19$$

Assim, vem que $\overline{TU} = \overline{SU} - \overline{ST} = 1,19 - 0,10 = 1,09$

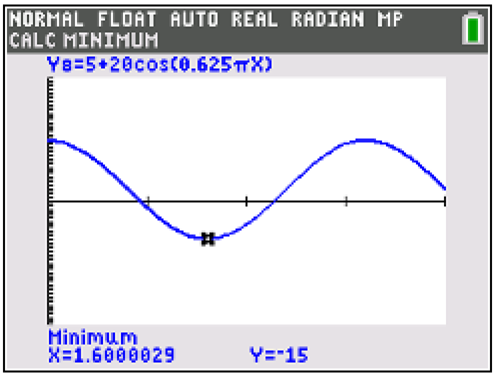
O comprimento do cabo do remo é 1,1 metros.

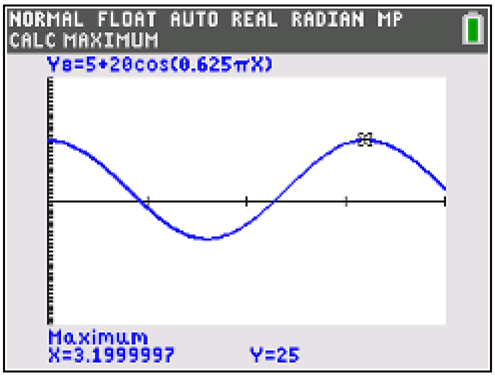
4.2.

A função h é uma função periódica e o problema consiste em determinar a diferença entre o valor mínimo e o valor máximo que a função atinge.

Para isso vamos recorrer à calculadora gráfica, com uma janela de visualização adequada, tendo em conta o contexto do problema, por exemplo, com $x \in [0, 4]$ e $y \in [-50, 50]$ (repare-se que o valor da cota é dado em centímetros).

Calculamos de seguida as coordenadas de um ponto de mínimo e de um ponto de máximo:





Por análise dos gráficos podemos então concluir que a diferença entre a cota máxima e a cota mínima é dada por $25 - (-15) = 40$ cm.

5.

5.1.

A superfície da água do mar corresponde a 0 metros de profundidade, logo a pressão da água do mar à superfície é dada por $p(0)$.

$$p(0) = 1$$

Assim, a pressão da água do mar à superfície é de 1 atm.

5.2. O declive da reta é 0,1, o que significa que, quando a profundidade aumenta 1 metro, a pressão aumenta 0,1 atmosferas.

6.

A partir da informação obtida através da leitura do gráfico que nos é dado no enunciado, construímos a seguinte tabela:

x	Mês	Frequências simples
1	Janeiro	6851
2	Fevereiro	5821
3	Março	4271
4	Abril	6185

Assim, podemos concluir que o mês de abril corresponde a $x = 4$ e, por isso, o total de pescado nesse mês é igual a 6185 toneladas.

Deste modo, sendo a quantidade de molusco correspondente a 10,8% da quantidade total de pescado, temos que:

$$10{,}8\% \times 6185 = 667{,}98 \approx 668$$ (valor arredondado às unidades).

Em Portugal, em abril de 2018, foi capturada a quantidade de 668 toneladas de molusco.

7.

Seja X a variável aleatória "comprimento de um sargo capturado, em centímetros", temos que $X \sim N(22; 3{,}5)$ e pretende-se determinar a $P\ (X < 15)$.

1º Processo

Sendo X uma variável aleatória normal de valor médio 22 e desvio padrão 3,5, então $\mu - 2\sigma = 15$ e $\mu + 2\sigma = 29$ e, por isso, $P\ (15 < X < 29) \approx 0{,}9545$.

$P\ (X < 15) = \frac{1-0{,}9545}{2} = 0{,}02275 \approx 2\%$

Assim, a probabilidade de o sargo escolhido ser devolvido ao mar é igual a 2%.

2º Processo

$P\ (X < 15) = P\ (X < 22) - P\ (15 < X < 22)$.

Recorrendo à calculadora gráfica, **normalcdf (15; 22; 22; 3,5)**, obtemos que

$P\ (15 < X < 22) = 0{,}47725$.

Como $P\ (X < 22) = 0{,}5$ então podemos concluir que

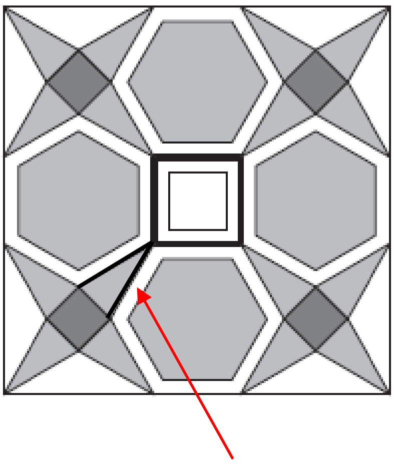
$P\ (X < 22) - P\ (15 < X < 22) = 0{,}5 - 0{,}47725 = 0{,}02275 \approx 2\%$

Assim, a probabilidade de o sargo escolhido ser devolvido ao mar é igual a 2%.

8.

8.1.

Analisemos o esquema representado na figura 6:



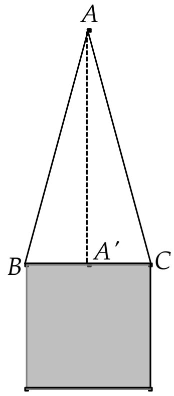
Podemos observar que o lado do quadrado maior, **a negrito**, é igual ao lado dos hexágonos maiores (não sombreados). Por sua vez, o lado destes hexágonos é igual ao lado maior dos triângulos isósceles sombreados.

Cada um desses lados mede então 3 cm.

Por outro lado, sabemos que a amplitude de cada um dos ângulos internos de um hexágono regular é 120º.

(Também podemos fazer $\frac{180\times(6-2)}{6}$=120º)

Usemos agora um esquema que nos permita calcular a medida do lado menor dos triângulos e, com isso, a medida de área de cada quadrado sombreado:



Observando ainda o esquema da figura 6, podemos deduzir o valor da amplitude $\hat{A}$:

$120^{\circ}+90^{\circ}+120+\hat{A}=360^{\circ} \Leftrightarrow \hat{A}=360^{\circ}-330^{\circ}=30^{\circ}$

Donde concluímos que $\hat{C}=75^{\circ}$

Assim, temos: $\cos 75^{\circ}=\dfrac{\overline{A'C}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{A'C}=3\times\cos 75^{\circ}\simeq 0,776$

$\overline{BC}=2\times\overline{A'C}\simeq 2\times 0,776=1,552$

A área de cada quadrado sombreado é : $\overline{BC}\times\overline{BC}=1,552^2\simeq 2,4\ \text{cm}^2$

8.2.

Da figura 7 e dos dados do problema podemos deduzir as coordenadas dos pontos A e M .

Assim temos $A(-1.5,0)$ e $M(1.5,1.5)$

O declive da reta AM é $m=\dfrac{1.5-0}{1.5-(-1.5)}=\dfrac{1.5}{3}=0.5$

A reta pertence então à família $y=0.5x+b$

Como passa em A, substituindo na equação, obtemos: $0.5\times(-1.5)+b=0 \Leftrightarrow b=0.75$

Donde se conclui que a equação da reta é $y=0.5x+0.75$

FIM