

Exame Final Nacional de Matemática B
Prova 735 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2019

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho | Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

8 Páginas

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As citações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos visualizados na sua utilização, mais precisamente, consoante a situação:

- os gráficos obtidos, com os pontos relevantes para a resolução assinalados (por exemplo, pontos de intersecção de gráficos, pontos de máximos e pontos de mínimos);
 - as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
 - as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).
-

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r}{180}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\ maior \times Diagonal\ menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\ maior + Base\ menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: $Semiperímetro \times Apótema$

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r^2}{360}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r – raio)

Área lateral de um cilindro reto: $2 \pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Cone: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Cilindro: $Área\ da\ base \times Altura$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n) :

• **Progressão aritmética:** $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

• **Progressão geométrica:** $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Probabilidades e Estatística

Se X é uma variável aleatória discreta de valores x_i com probabilidade p_i , então:

• **Valor médio de X :**

$$\mu = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$$

• **Desvio padrão de X :**

$$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \dots + p_n (x_n - \mu)^2}$$

Se X é uma variável aleatória normal de valor médio μ e desvio padrão σ , então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$$

1. A Ponte da Arrábida é uma ponte em arco sobre o rio Douro, que liga o Porto a Vila Nova de Gaia.

A Figura 1 é uma fotografia dessa ponte.



Figura 1

O arco dessa ponte é parabólico e pode ser modelado por uma função definida por

$$f(x) = -\frac{52}{18\,225}(x^2 - 270x)$$

Na Figura 2, está representado, em referencial ortogonal e monométrico, Oxy , o arco de parábola correspondente ao da Ponte da Arrábida, que é parte do gráfico da função quadrática definida por $f(x)$.

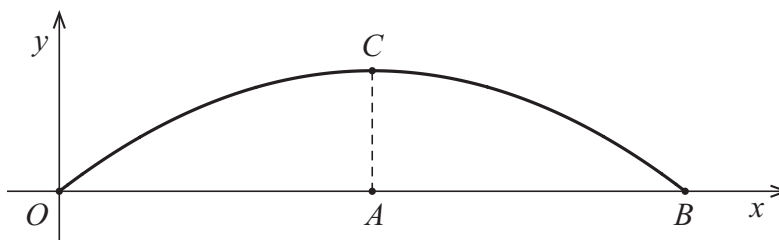


Figura 2

Nesta figura:

- os pontos O e B são os extremos do arco de parábola e pertencem ao eixo Ox ;
- o ponto A é o ponto do eixo Ox cuja abcissa é o maximizante da função f ;
- o ponto C é o ponto do gráfico de f com a mesma abcissa de A .

No referencial, a unidade é o metro.

O segmento de reta $[OB]$ representa o designado vão da ponte, e o segmento de reta $[AC]$ representa a designada flecha da ponte.

1.1. Determine o comprimento, em metros, do vão da Ponte da Arrábida.

1.2. Determine o comprimento, em metros, da flecha da Ponte da Arrábida.

2. Desde o dia em que um museu abriu as portas ao público, o número diário de visitantes seguiu, durante o primeiro ano de funcionamento, um modelo aproximadamente logístico.

Admita que, durante aquele ano, o número diário de visitantes do museu, N , é dado, aproximadamente, por

$$N(t) = \frac{8000}{1 + 4e^{-0,02t}}, \text{ com } 0 \leq t \leq 364$$

sendo t o tempo, em dias, decorrido desde o final do dia da abertura.

- 2.1. Determine a diferença entre o número de visitantes do museu no último dia daquele ano e o número de visitantes do museu no dia da abertura.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

- 2.2. Determine durante quantos dias, naquele ano, o número de visitantes do museu foi superior a 4000 e foi inferior a 5000.

3. Uma padaria tradicional bicentenária, situada numa zona turística, foi transformada num museu da padaria. Entre outros produtos, vende milho e vende trigo, em saquinhos de pano ao estilo de 1850.

Para estas vendas, a padaria dispõe, diariamente, de:

- 80 kg de milho;
- 60 kg de trigo;
- 120 saquinhos de pano.

Cada saquinho é vendido com 1 kg de milho ou com 1 kg de trigo.

Cada saquinho de milho dá o lucro de 1 euro, e cada saquinho de trigo dá o lucro de 2 euros.

- 3.1. Num certo dia, a padaria vendeu saquinhos de milho e saquinhos de trigo.

Sabe-se que vendeu 20 saquinhos de milho nesse dia.

Verifique se, nas condições referidas, o lucro obtido pela padaria, nesse dia, pode ter sido 80 euros.

- 3.2. Determine quantos saquinhos de milho e quantos saquinhos de trigo a padaria deve vender, diariamente, para obter o lucro diário máximo nas condições referidas.

Na sua resposta, designe por x o número de saquinhos de milho vendidos diariamente, e designe por y o número de saquinhos de trigo vendidos diariamente, e apresente:

- a função objetivo;
- as restrições do problema;
- uma representação gráfica referente ao sistema de restrições;
- o valor de x e o valor de y correspondentes à solução do problema.

4. Um dos ícones da Holanda é o moinho de vento.

Na cidade de Schiedam, encontram-se os maiores moinhos de vento do mundo, alguns dos quais apresentados na fotografia da Figura 3.



Figura 3

A Figura 4, que não está à escala, ilustra o movimento de rotação das pás de um desses moinhos, em referencial ortogonal e monométrico, Oxy .

De entre outros elementos representados nesta figura, destacam-se:

- a estrutura do moinho, cuja parte inferior tem 18 metros de altura, representada pelo trapézio isósceles sombreado;
- as quatro pás do moinho, cada uma com 15 metros de comprimento, e uma delas representada por $[OP]$;
- a extremidade de uma das pás, representada pelo ponto P ;
- a trajetória do movimento de rotação dessa extremidade, representada pela circunferência de centro O e raio 15 m;
- o ângulo orientado QOP , sendo Q o ponto da circunferência pertencente ao semieixo positivo das abcissas.

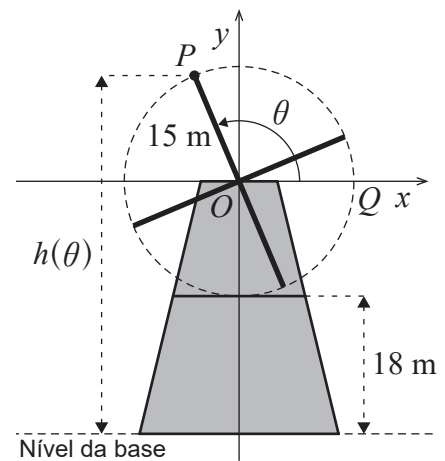


Figura 4

Seja $\theta = \widehat{QOP}$, com $\theta \in [0, 2\pi]$, e seja $h(\theta)$ a altura, em metros, relativamente ao nível da base, da extremidade da pá, representada por P , em função de θ .

4.1. Mostre que $h(\theta) = 33 + 15 \sin \theta$.

4.2. Determine os valores de θ para os quais a altura, relativamente ao nível da base, da extremidade da pá, representada por P , é 40,5 m.

Apresente os resultados em radianos, arredondados às centésimas.

5. O Templo de Kukulcán, apresentado na fotografia da Figura 5, localiza-se na antiga cidade maia de Chichén Itzá, no México.

Trata-se de um sólido complexo, constituído por nove troncos de pirâmide quadrangular sobrepostos, quatro fachadas, cada uma com uma escadaria central, e um altar sobre o tronco superior.



Figura 5

- 5.1. A base maior do tronco inferior tem 55 metros de lado e está assente no solo.

Admita que os comprimentos dos lados das bases maiores de cada um dos nove troncos de pirâmide são termos consecutivos de uma progressão aritmética de razão $-5,25$.

Determine o comprimento, em metros, do lado da base maior do tronco superior do sólido.

- 5.2. Cada escadaria é constituída por 91 degraus.

A inclinação da escadaria e a curta largura dos degraus tornam a subida uma tarefa difícil. Com o cansaço acumulado, o ritmo da subida vai sendo cada vez mais lento e o tempo de permanência em cada degrau vai aumentando.

Admita que, na subida de uma das escadarias:

- um turista ficou 0,5 segundos no 1.º degrau;
- a partir daí, o quociente entre o tempo em que esse turista ficou num degrau e o tempo em que ficou no degrau anterior é 1,05.

Determine quanto tempo o turista demorou a subir toda a escadaria.

Apresente o resultado em minutos, arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, pelo menos, duas casas decimais.

- 5.3. Na tabela seguinte, relaciona-se o índice de massa corporal, x , com o tempo, y , em minutos, que cada elemento de um grupo de turistas demorou a subir uma das escadarias centrais do Templo de Kukulcán.

x	17,0	18,3	19,4	20,1	20,3	23,6	23,7	25,1	25,2	26,2
y	1,5	2,5	8,5	2,3	5,1	10,0	9,5	16,1	15,1	17,0

Verifica-se a existência de uma correlação linear forte entre as duas variáveis.

Considere um modelo de regressão linear obtido a partir dos dados apresentados na tabela.

Estime, com base nesse modelo, o tempo que um turista desse grupo com índice de massa corporal 23,1 demoraria a subir aquela escadaria.

Na sua resposta, apresente:

- os valores dos parâmetros da equação da reta de regressão linear de y sobre x , arredondados às milésimas;
- o valor pedido, em minutos, arredondado às décimas.

6. A Pirâmide de Quéops, no Egito, é a mais antiga das Sete Maravilhas do Mundo Antigo. Com o tempo, o monumento perdeu parte da sua cúspide, sendo agora, aproximadamente, um tronco de pirâmide quadrangular, como se observa na fotografia da Figura 6.



Figura 6

- 6.1. Quando foi construída, a pirâmide tinha 146,5 m de altura. Atualmente, o monumento tem 138,8 m de altura e mantém a base com 230,4 m de lado.

A Figura 7 é um esquema de um corte perpendicular à base, que passa no seu centro e nos pontos médios de duas arestas opostas dessa base.

Nesta figura:

- o ponto B representa o centro da base do monumento;
- $[AC]$ representa a intersecção do plano de corte com a base;
- o ponto G representa o vértice da pirâmide quando esta foi construída, e $[BG]$ representa a altura da pirâmide nessa época;
- o ponto E representa o centro da face superior do tronco de pirâmide;
- $[DF]$ representa a intersecção do plano de corte com a face superior do tronco de pirâmide;
- $[BE]$ representa a altura atual do monumento.

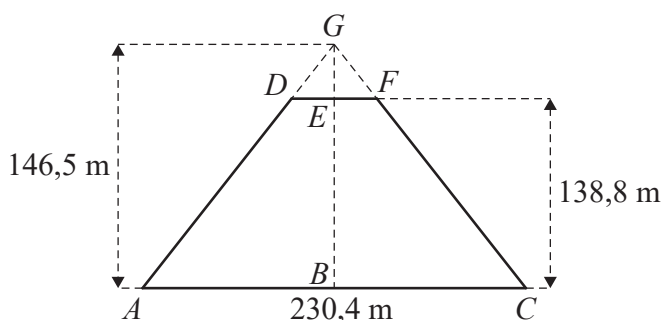


Figura 7

Sabe-se que: $\overline{AC} = 230,4 \text{ m}$, $\overline{BG} = 146,5 \text{ m}$ e $\overline{BE} = 138,8 \text{ m}$.

Determine o volume atual do monumento.

Apresente o resultado em metros cúbicos, arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, pelo menos, três casas decimais.

- 6.2. Na Figura 7, fixou-se um referencial ortogonal e monométrico, de origem no ponto B , tal que o ponto C pertence ao semieixo positivo das abcissas. A Figura 8 representa a situação.

A unidade no referencial é o metro.

Determine as coordenadas do ponto simétrico do ponto C , relativamente ao eixo das ordenadas.

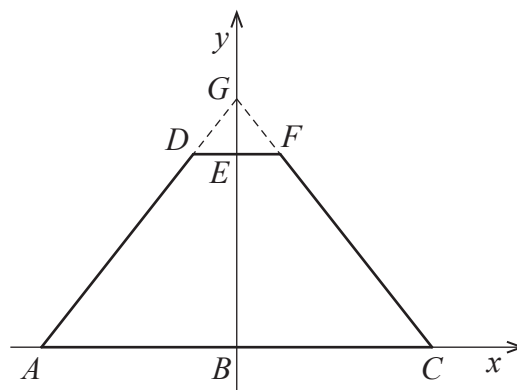


Figura 8

- 6.3.** Admita que, durante o período da construção da Pirâmide de Quéops, a quantidade de pedra instalada por dia, em toneladas, segue uma distribuição normal de valor médio 800 e desvio padrão 12 .

Determine a probabilidade de, num dia da construção, escolhido ao acaso, se terem instalado menos de 776 toneladas de pedra.

Apresente o resultado em percentagem, arredondado às décimas.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, pelo menos, cinco casas decimais.

FIM

COTAÇÕES

Item														TOTAL
Cotação (em pontos)														
1.1.	1.2.	2.1.	2.2.	3.1.	3.2.	4.1.	4.2.	5.1.	5.2.	5.3.	6.1.	6.2.	6.3.	
10	10	15	20	10	20	15	15	10	15	15	20	10	15	200