Associação de Professores de Matemática
Contactos:
Rua Dr. João Couto, n.º 27-A
1500-236 Lisboa
Tel.: +351 21 716 36 90 / 21 711 03 77
Fax: +351 21 716 64 24
http://www.apm.pt
email: geral@apm.pt

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA B DO ENSINO SECUNDÁRIO

(CÓDIGO DA PROVA 735) – 2ª FASE – 20 DE JULHO 2018

Grupo I

1.

1.1. Analisando o sistema de restrições e atendendo a que x representa o número de pacotes do tipo I e y representa o número de pacotes do tipo II, conclui-se que os do tipo I são compostos por 2 quartos triplos, 4 quartos duplos e 2 individuais; os do tipo II são compostos por 3 triplos, 3 duplos e 1 individual.

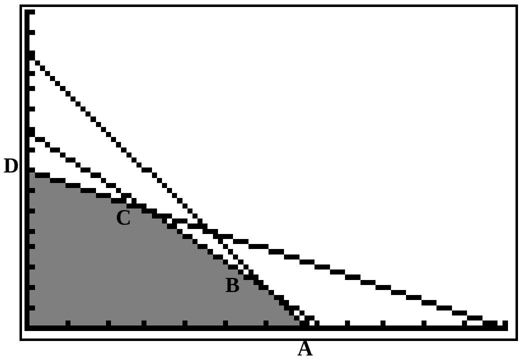
1.2. A função objetivo é a receita obtida com a venda de x pacotes do tipo I e y pacotes do tipo II.

Temos assim que essa receita é *R(x,y) = 600x + 400y.*

Introduzindo na calculadora as expressões que resultam do sistema de restrições:

- $2x+3y\leq 24 \Leftrightarrow y\leq -\frac{2}{3}x+8$
- $4x+3y\leq 30 \Leftrightarrow y\leq -\frac{4}{3}x+10$
- $2x+y\leq 14 \Leftrightarrow y\leq -2x+14$

Obtemos uma representação gráfica da região admissível:



Determinando as interseções relevantes fixamos os vértices da região e calculamos o valor da receita correspondente:

Vértice	x	y	$R(x,y) = 600x + 400y$
A	7	0	4200
B	6	2	**4400**
C	3	6	4200
D	0	8	3200

Solução ótima do problema: $x = 6$, $y = 2$

A receita máxima possível, 4 400€, obtém-se através da venda de 6 pacotes do tipo I e 2 pacotes do tipo II.

2. Como só há uma bola verde, a variável aleatória X pode tomar os valores 1 ou 2, correspondentes aos acontecimentos $(Verde, Azul)$, $(Azul, Verde)$ ou $(Azul, Azul)$

Calculemos as respetivas probabilidades, atendo a que a extração das bolas se faz sem reposição:

$P(V,A) = \frac{1}{5} \times 1 = \frac{1}{5}$; $P(A,V) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$; $P(A,A) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{5}$

A tabela de distribuição da variável aleatória X é então:

x_i	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

O valor médio de X é $\mu = 1 \times \frac{2}{5} + 2 \times \frac{3}{5} = \frac{8}{5} = 1{,}6$

3. O valor 170 corresponde a $\mu + \sigma$ e o valor 180 corresponde a $\mu + 2\sigma$.

Designando por Y a variável aleatória "altura, em cem centímetros, de um funcionário" e recorrendo aos valores do formulário, temos que:

$P(140 < Y < 180) = 0.9545$ (reparemos que $140 = \mu - 2\sigma$)

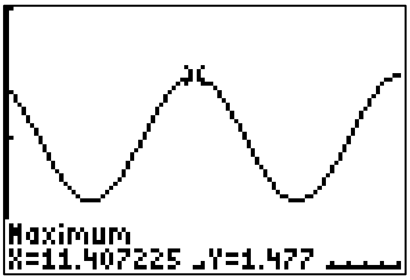
$P(150 < Y < 170) = 0.6827$ (reparemos também que $150 = \mu - \sigma$)

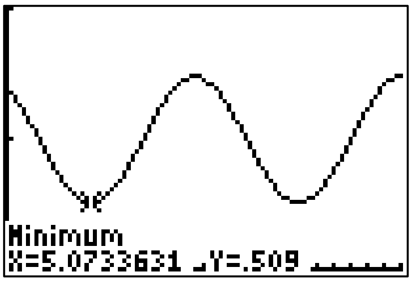
Então: $P(170 < Y < 180) = \frac{0.9545 - 0.6827}{2} = 0.1359$

A probabilidade pedida é de, aproximadamente, 0,14

Grupo II

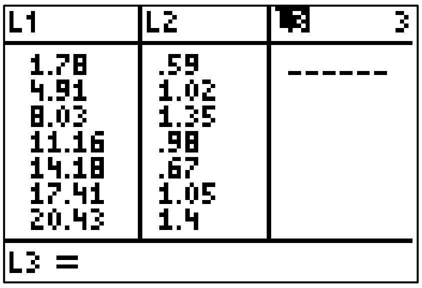
1. Começar por obter uma representação gráfica da função *h* na calculadora, considerando, por exemplo, a janela de visualização $[0,24]\times[0,2]$, e determinar o valor máximo e o valor mínimo da função para $t\in[0,24]$, obtendo-se, respetivamente, 1,477 e 0,509.

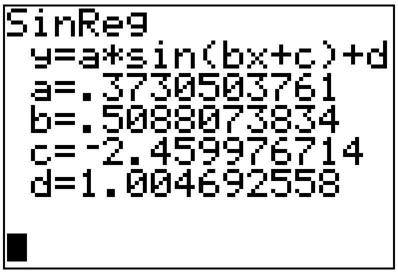




Assim, a diferença dos valores máximo e mínimo da altura da maré no primeiro dia do referido período é de 1,477-0,509 =0,968$\simeq$1m.

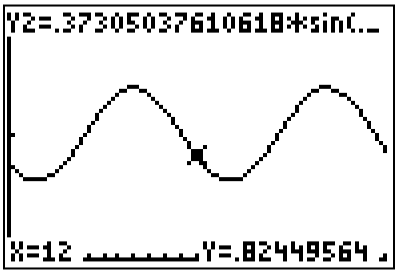
2. Criam-se duas listas na calculadora, de acordo com os dados fornecidos no diagrama de dispersão.





Utilizando na calculadora a função SinReg (regressão sinusoidal) determinam-se os valores de *a*, *b*, *c* e *d*, arredondados às centésimas: $a\simeq 0,37$; $b\simeq 0,51$; $c\simeq -2,46$ e $d\simeq 1,00$.

Temos agora que estimar um valor para $f(12)$, onde f representa a expressão do modelo determinado. Para isso podemos também usar a calculadora, definindo numa variável disponível a expressão do modelo.



Conclui-se que o valor aproximado da altura de maré no porto da Horta às 12 horas do dia 27 de julho de 2016 foi de 0,82m.

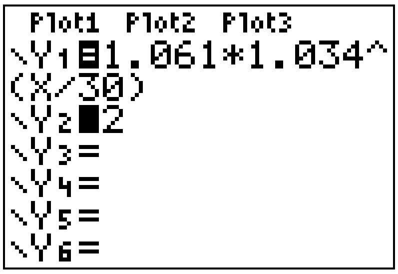
Grupo III

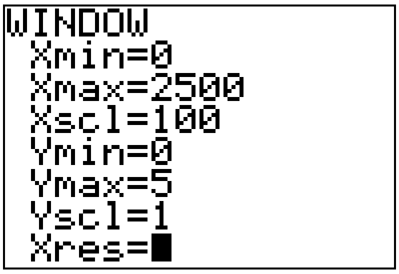
1.1 Tendo em conta a informação que é dada e o significado de t no modelo apresentado, temos que às zero horas de 1 de janeiro de 2008, $t=0$

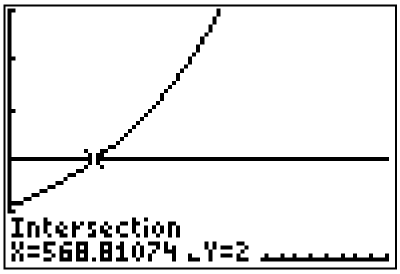
Ora, $N(0)=1{,}061\times 1{,}034^{\frac{0}{30}}=1{,}061$

Foram vendidos, até às zero horas de 1 de janeiro de 2008, $1{,}061$ milhões de telemóveis.

1.2 Recorrendo à calculadora esboçamos uma representação gráfica do modelo $N(t)$ e da reta $y=2$ e determinamos a respetiva interseção:







Temos assim que passados 569 dias após as zero horas de 1 de janeiro de 2008 ultrapassaram-se os 2 milhões de unidades vendidas. 569 = 366+203

Ultrapassaram-se os 2 milhões de telemóveis vendidos no ano de 2009.

1.3 $N(60)-N(31)$ representa a variação da função $N(t)$ entre o dia 31 e o dia 60 após as zero horas de 1 de janeiro de 2008.

Ora $60-31=29$ que corresponde ao número de dias do mês de fevereiro de 2008.

No mês de fevereiro de 2008 houve um acréscimo nas vendas de telemóveis correspondente a, aproximadamente, 0.04 milhões de unidades, isto é, mais 40000 unidades vendidas que durante o mês de janeiro.

2.

2.1. $C(0)=700$ e $C(2)=3\times 700$

$$\begin{cases} a\log 10 = 700 \\ a\log(2b+10)=2100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=700 \\ 700\log(2b+10)=2100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=700 \\ \log(2b+10)=3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=700 \\ 2b+10=10^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=700 \\ 2b=1000-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=700 \\ b=\dfrac{990}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=700 \\ b=495 \end{cases}$$

Então, os valores dos parâmetros a e b são, respetivamente, 700 e 495.

2.2. De acordo com a afirmação, a taxa de variação instantânea da função C no instante t correspondente ao final do terceiro mês de atividade é de, aproximadamente, 101.

Desta forma, temos que $T(3) \approx 101$.

Portanto: $r = 3$ e $s = 101$

Grupo IV

1.

1.1. O número total de apertos de mão dados inicialmente, caso estejam presentes n participantes, é a soma dos (*n-1*) primeiros termos consecutivos de uma progressão aritmética, em que o primeiro termo é 1 e o termo de ordem (*n-1*) é (*n-1*). Assim, a soma desses termos é dada por

$$\frac{1+n-1}{2}\times(n-1)=\frac{n^2-n}{2}.$$

1.2. Pretende-se determinar *n* de modo que $\frac{n^2-n}{2}=2556$.

Assim,

$$n^2-n=5112$$
$$\Leftrightarrow n^2-n-5112=0$$
$$\Leftrightarrow n=\frac{1\pm\sqrt{1+4\times 5112}}{2}$$
$$\Leftrightarrow n=\frac{1\pm\sqrt{20449}}{2}$$
$$\Leftrightarrow n=\frac{1\pm 143}{2}$$

Pelo que, como $n>0$, $n=72$.

O curso tinha 72 participantes.

2.

2.1. Tem-se que

$$A\hat{O}B = B\hat{O}C = C\hat{O}D = D\hat{O}E = E\hat{O}A = \frac{360^{\text{o}}}{5} = 72^{\text{o}}$$

e $504^{\text{o}} = 360^{\text{o}} + 144^{\text{o}} = 360^{\text{o}} + 2\times 72^{\text{o}}$

O lado extremidade do ângulo orientado com lado origem $\dot{O}A$ e 504° de amplitude é, então, $\dot{O}C$

2.2. Tem-se que $G\hat{B}F = \frac{D\hat{O}E}{2} = \frac{72^{\text{o}}}{2} = 36^{\text{o}}$.

Como [*FBG*] é um triângulo isósceles, $F\hat{G}B = \frac{180^{\text{o}} - 36^{\text{o}}}{2} = 72^{\text{o}}$

$\overline{BM} = 1 - 0,309 = 0,691\,\text{cm}$

O triângulo [*MBG*] é retângulo. Assim,

$tg\left(72^{\text{o}}\right) = \frac{\overline{BM}}{\overline{GM}}$,

pelo que $tg\left(72^{\text{o}}\right) = \frac{0,691}{\overline{GM}} \Leftrightarrow \overline{GM} = \frac{0,691}{tg\left(72^{\text{o}}\right)} \simeq 0,225\,\text{cm}$

Logo,

$$\begin{aligned} A_{pentagrama} &= A_{[FGHIJ]} + 5\times A_{[FBG]} \\ &= \frac{5\times 2\times 0,225}{2}\times 0,309 + 5\times \frac{2\times 0,225\times 0,691}{2} \simeq 1,1\,\text{cm}^2 \end{aligned}$$

FIM