REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática B

Prova 735 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2018

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 14 Páginas

---

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Nas respostas aos itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos visualizados na sua utilização, mais precisamente, consoante a situação:

- os gráficos obtidos, com os pontos relevantes para a resolução assinalados (por exemplo, pontos de intersecção de gráficos, pontos de máximos e pontos de mínimos);
- as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r}{180}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\ maior \times Diagonal\ menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\ maior + Base\ menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: $Semiperímetro \times Apótema$

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r^2}{360}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r – raio)

Área lateral de um cilindro reto: $2 \pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Cone: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Cilindro: $Área\ da\ base \times Altura$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

- **Progressão aritmética:** $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$
- **Progressão geométrica:** $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Probabilidades e Estatística

Se X é uma variável aleatória discreta de valores x_i com probabilidade p_i, então:

- **Valor médio** de X:
  $\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$
- **Desvio padrão** de X:
  $\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é uma variável aleatória normal de valor médio μ e desvio padrão σ, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Página em branco

GRUPO I

Uma quinta dedica-se à produção e ao comércio vitivinícolas e ao enoturismo.

1. A quinta tem um terreno destinado, na sua totalidade, ao cultivo de vinhas de duas castas: touriga nacional e touriga franca.

A área do terreno destinada à touriga nacional não pode exceder 50 hectares.

A área do terreno destinada à touriga franca não pode exceder 40 hectares.

Pretende-se obter um determinado subsídio e, para o conseguir, é necessário efetuar um investimento inicial, para o qual está fixado um valor mínimo.

Cada hectare de vinha da casta touriga nacional tem um custo inicial de 36 euros, e cada hectare de vinha da casta touriga franca tem um custo inicial de 45 euros.

Sabe-se que o seguinte sistema de restrições permite determinar as áreas possíveis para o cultivo de vinhas de cada casta.

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \leq 50 \\ y \leq 40 \\ x + y \leq 60 \\ 36x + 45y \geq 1800 \end{cases}$$

Neste sistema, x representa o número de hectares do terreno que podem ser destinados ao cultivo de vinha da casta touriga nacional, e y representa o número de hectares do terreno que podem ser destinados ao cultivo de vinha da casta touriga franca.

1.1. Identifique:

– o valor mínimo do investimento inicial;

– a área total do terreno.

1.2. Está previsto que cada hectare de vinha da casta touriga nacional dê um lucro de 350 euros e que cada hectare de vinha da casta touriga franca dê um lucro de 200 euros.

Determine o número de hectares de vinha da casta touriga nacional e o número de hectares de vinha da casta touriga franca que se devem cultivar para se obter o lucro máximo.

Na sua resposta, apresente:

– a função objetivo;

– uma representação gráfica da região admissível referente ao sistema de restrições;

– a solução do problema.

2. Na quinta, foi construída uma piscina para exploração turística, com uma forma idêntica à da fotografia da Figura 1.

Figura 1

Na Figura 2, está representado, a sombreado, em referencial ortogonal e monométrico, Oxy, um esquema da forma do espelho de água dessa piscina.

Este esquema foi obtido a partir de parte da reta de equação

$$y = 1$$

e de parte do gráfico da função definida por

$$t(x) = 4 + 3\,\text{sen}\left(1{,}3x - \frac{\pi}{6}\right) - 3\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right),$$

com os argumentos das funções seno e cosseno em radianos.

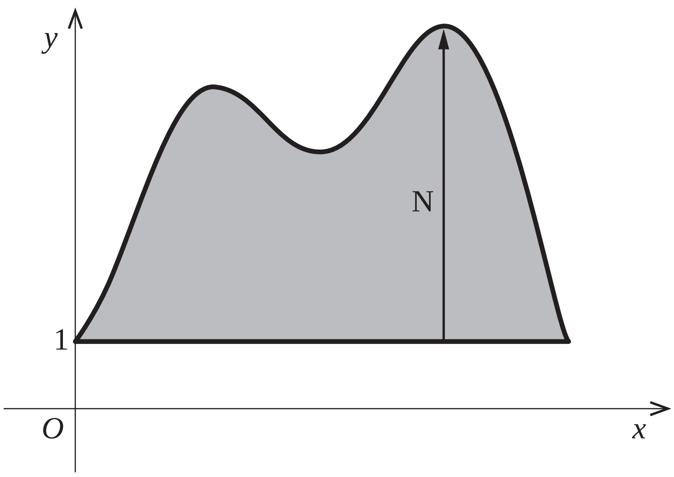

Figura 2

No referencial, a unidade é o metro, e a orientação do semieixo positivo Oy corresponde ao sentido norte, relativamente à localização da piscina.

Como a figura ilustra, N representa a maior distância que é possível nadar de sul para norte.

Determine o valor de N.

Apresente o resultado em metros, arredondado às décimas.

3. A quinta produz uva de mesa sem grainha e entregou uma encomenda de embalagens desta uva a uma rede de hipermercados.

Escolhe-se uma dessas embalagens ao acaso.

Seja X a variável aleatória «peso, em gramas, da embalagem escolhida». Admita que X segue uma distribuição normal de valor médio 500 gramas e desvio padrão 25 gramas.

Sabe-se que foram entregues 1500 embalagens à rede de hipermercados.

Quantas embalagens, aproximadamente, se espera que tenham menos de 450 gramas?

Na sua resposta:

– comece por determinar a probabilidade de uma embalagem, escolhida ao acaso, ter menos de 450 gramas;

– em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, cinco casas decimais;

– apresente o valor pedido arredondado às unidades.

GRUPO II

No departamento comercial da quinta, implementam-se estratégias de vendas tanto para a própria loja, como para o restante mercado, interno e externo.

1. Na loja de vinhos da quinta, as garrafas estão em expositores, como se ilustra no esquema da Figura 3.

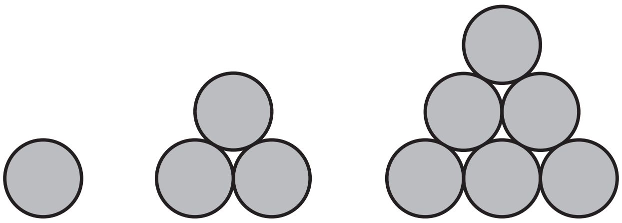

Figura 3

O primeiro expositor tem uma garrafa, o segundo tem mais duas garrafas do que o primeiro, o terceiro tem mais três garrafas do que o segundo, e assim sucessivamente, até ao oitavo expositor.

1.1. Determine quantas garrafas tem o oitavo expositor.

1.2. Considere a sequência do número de garrafas que cada expositor tem.

Como a Figura 3 ilustra, os três primeiros termos desta sequência são 1, 3 e 6.

Justifique que os termos desta sequência não são termos consecutivos de uma progressão aritmética, nem são termos consecutivos de uma progressão geométrica.

2. Nos últimos anos, em Portugal, tem-se verificado um aumento das exportações de bens e serviços, e as exportações de produtos associados à vitivinicultura têm acompanhado essa tendência. Tem-se ainda verificado uma correlação forte entre as exportações de produtos da agricultura, da silvicultura e da pesca e as exportações de produtos alimentares e bebidas.

Na tabela seguinte, apresentam-se os valores, x, em milhões de euros, relativos às exportações de produtos da agricultura, da silvicultura e da pesca e os correspondentes valores, y, em milhões de euros, relativos às exportações de produtos alimentares e bebidas nos anos de 2005 a 2014.

x	y
594,2	2341,0
664,6	2723,1
736,3	3206,5
904,2	3611,1
830,0	3345,7
940,5	3619,7
992,6	4077,3
1041,8	4302,5
1028,7	4744,0
1146,1	4966,9

Considere um modelo de regressão linear obtido a partir dos dados apresentados na tabela e admita que esse modelo se mantém válido no ano 2015. Neste ano, foram exportados produtos da agricultura, da silvicultura e da pesca no valor de $1225{,}8$ milhões de euros.

Estime, com base nesse modelo, o valor das exportações de produtos alimentares e bebidas no ano 2015.

Na sua resposta:

– apresente os valores dos parâmetros da equação da reta de regressão linear de y sobre x, arredondados às milésimas;

– apresente o valor pedido em milhões de euros, arredondado às unidades.

GRUPO III

Na quinta, o processo de produção do vinho engloba um período em que este é armazenado em barris de madeira, na cave, em condições de temperatura controlada por um sistema de refrigeração.

1. Admita que, durante doze horas, a temperatura ambiente na cave, A, em graus Celsius $(^{\mathrm{o}}\mathrm{C})$, x horas após as $9\ \mathrm{h}$ do dia 2 de agosto de 2017, é dada, aproximadamente, por

$$A(x) = 16 + \frac{0{,}003x^7 - 0{,}08x^5 + 0{,}9x^3}{e^x} \quad , \text{ com } 0 \leq x \leq 12$$

Determine a hora desse dia, após as $9\ \mathrm{h}$, em que a temperatura ambiente na cave atingiu $17\ ^{\mathrm{o}}\mathrm{C}$, pela primeira vez.

Apresente o resultado em horas e minutos, com o número de minutos arredondado às unidades.

Em valores intermédios, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

Resolva o problema recorrendo às capacidades gráficas da calculadora.

2. No dia 3 de agosto de 2017, às $9\ \mathrm{h}$, foi detetada uma avaria no sistema de refrigeração da cave.

Admita que, durante vinte horas, a temperatura ambiente na cave, T, em graus Celsius $(^{\mathrm{o}}\mathrm{C})$, x horas após a avaria ter sido detetada, é dada, aproximadamente, por

$$T(x) = \frac{57}{ax^2 + bx + 3{,}3} \quad , \text{ com } 0 \leq x \leq 20$$

e em que a e b são números reais não nulos.

2.1. Determine a temperatura ambiente na cave no instante em que a avaria foi detetada.

Apresente o valor pedido em graus Celsius, arredondado às décimas.

2.2. Seja V a função que dá a taxa de variação instantânea da função T, para cada valor de x.

Interprete, no contexto descrito, o significado de $V(1) \approx 0{,}5$.

2.3. Nesse dia, às $16\ \mathrm{h}$ e às $22\ \mathrm{h}$, a temperatura ambiente na cave era $20\ ^{\mathrm{o}}\mathrm{C}$.

Determine o valor de a e o valor de b.

Apresente o valor de a arredondado às milésimas e o valor de b arredondado às décimas.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

GRUPO IV

A madeira é uma das matérias-primas mais usadas na quinta, quer no departamento de produção, designadamente na produção de barris de vinho, quer na construção de edifícios e zonas envolventes destinados ao turismo.

1. Durante séculos, gerações de tanoeiros dedicaram as suas vidas à arte de construir barris de madeira.

1.1. Na Figura 4, está representado um dos barris de madeira existentes na cave da quinta, no qual é visível um orifício, designado batoque.

Com base no barril representado na Figura 4, fez-se o esquema apresentado na Figura 5.

Relativamente ao sólido de revolução apresentado neste esquema, que não está à escala, e considerando desprezável a espessura da madeira, sabe-se que:

- tem duas bases circulares iguais, com $1{,}55\ \text{m}$ de diâmetro;
- tem $2{,}2\ \text{m}$ de altura;
- o diâmetro maior, que corresponde ao diâmetro do círculo resultante da intersecção do sólido com o plano paralelo às bases e equidistante destas, mede $1{,}87\ \text{m}$;
- o ponto B pertence à circunferência de diâmetro maior e representa o batoque.

Figura 4

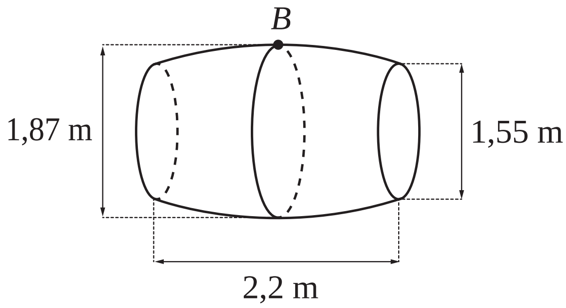

Figura 5

Um método utilizado para calcular a capacidade deste tipo de barril consiste em medir a distância, j , em metros, do batoque ao extremo inferior do barril, como se ilustra na Figura 6, e em aplicar a fórmula

$$C = j^3 \times 605$$

obtendo-se, assim, um valor aproximado da capacidade do barril, C , em **litros**.

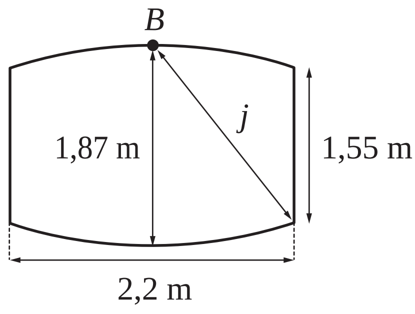

Figura 6

Será possível armazenar 5000 litros de vinho no barril?

Justifique a sua resposta.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

1.2. Para construir as bases do barril, um tanoeiro divide a circunferência que delimita cada uma das bases em seis partes iguais, como se ilustra na Figura 7.

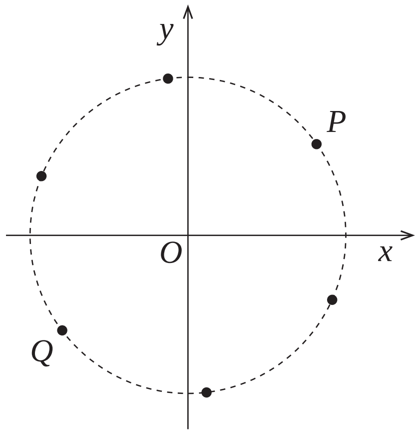

Figura 7

Nesta figura, estão representados, em referencial ortogonal e monométrico, Oxy :

- uma circunferência, centrada na origem, dividida em seis partes iguais;
- o ponto P, de coordenadas $(0{,}620\ ;\ 0{,}465)$;
- o ponto Q, simétrico do ponto P relativamente à origem.

Determine a equação reduzida da reta PQ .

2. Num jardim da quinta, sobre um riacho, existe uma pequena ponte de madeira, em forma de arco de parábola, idêntica à da fotografia da Figura 8.

Figura 8

Na Figura 9, está representado em referencial ortogonal, Oxy, esse arco de parábola, obtido a partir de parte do gráfico de uma função quadrática definida por

$$f(x) = ax^2 + bx \quad ,$$

em que a é um número real negativo e b é um número real positivo.

Nesta figura, P é o ponto de intersecção do arco de parábola com o semieixo positivo Ox.

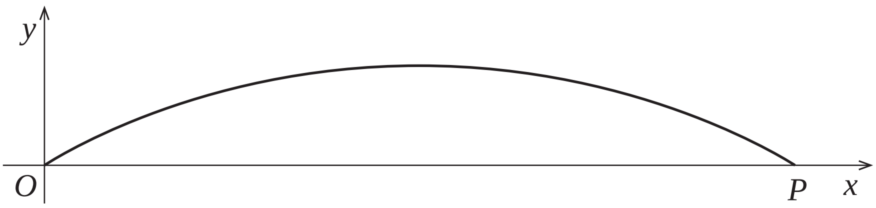

Figura 9

2.1. O comprimento do vão da ponte, correspondente a $\overline{OP}$, é dado por $-\frac{b}{a}$.

Mostre que as coordenadas do vértice da parábola são $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a}\right)$.

2.2. Considere o ângulo de vértice no ponto O, em que um dos lados é o semieixo positivo Ox e o outro lado é a semirreta $\dot{O}V$, tal como se ilustra na Figura 10, que não está à escala.

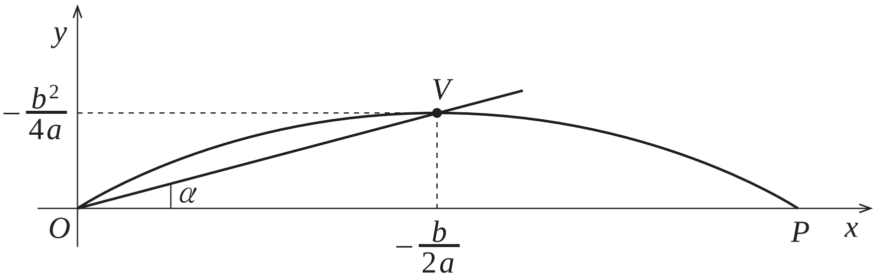

Figura 10

Admita que a amplitude, α, desse ângulo é igual a $0{,}3$ graus.

Determine o valor de b.

Apresente o resultado arredondado às centésimas.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

FIM

COTAÇÕES

Grupo	Item				
	Cotação (em pontos)				
I	**1.1.**	**1.2.**	**2.**	**3.**	
	10	20	15	15	**60**
II	**1.1.**	**1.2.**	**2.**		
	10	15	15		**40**
III	**1.**	**2.1.**	**2.2.**	**2.3.**	
	10	10	10	15	**45**
IV	**1.1.**	**1.2.**	**2.1.**	**2.2.**	
	15	15	10	15	**55**
TOTAL					**200**

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

Prova 735

1.ª Fase