

---

EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

---

## **Prova Escrita de Matemática B**

---

11.º Ano de Escolaridade

---

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

---

### **Prova 735/1.ª Fase**

---

Critérios de Classificação

14 Páginas

---

**2014**

## CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

Os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração.

É classificada com zero pontos qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho.

A classificação das respostas aos itens que envolvam a produção de um texto deve ter em conta a organização dos conteúdos e a utilização da linguagem científica adequada.

As respostas que não apresentem exatamente os termos ou expressões constantes dos critérios específicos de classificação devem ser classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentam, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso das potencialidades gráficas da calculadora deve ter em conta a apresentação de todos os elementos recolhidos na sua utilização.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação e as desvalorizações a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens que envolvam a realização de cálculos.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto. O critério específico deve ser adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplo: «recorrendo à regressão sinusoidal»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando a resolução do item exige cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta deve ser pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.

Situação	Classificação
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado, que não altere o que se pretende avaliar com o item.	<p>Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas.</p> <p>Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir deve ser a parte inteira de metade da pontuação prevista;</li> <li>– nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, estas devem ser pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação.</li> </ul>
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal na resolução de uma etapa.	<p>Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa.</p> <p>Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa deve ser a parte inteira de metade da pontuação prevista.</p> <p>As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).</p>
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	<p>É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre.</p> <p>As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).</p>
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades na resolução de uma etapa.	<p>A pontuação máxima a atribuir a essa etapa deve ser a parte inteira de metade da pontuação prevista.</p> <p>As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).</p>
10. Resolução incompleta de uma etapa.	<p>Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir deve ser a parte inteira de metade da pontuação prevista.</p>
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	<p>É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.</p>
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado em centímetros, e a resposta apresenta-se em metros].	<p>É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.</p>
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	<p>É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.</p>
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	<p>É subtraído um ponto à pontuação da etapa, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.</p> <p>As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os critérios gerais e específicos de classificação.</p>
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	<p>É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.</p>
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	<p>A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.</p>

Situação	Classificação
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	<p>Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não deve ser desvalorizada.</p> <p>Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.</p>
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	<p>É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos;</li> <li>– nos casos de uso do símbolo de igualdade onde, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.</li> </ul>

**Nota** – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas deve ser a parte inteira de metade da pontuação prevista.

# CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

## GRUPO I

30 pontos

Indicar a função objetivo ( $F = 1000x + 25\,000y$ ) .....	3 pontos
Indicar as restrições ( <b>ver nota 1</b> ) .....	11 pontos
$x \geq 2y$ ( <b>ver notas 2 e 3</b> ) .....	3 pontos
$x \leq 600$ ( <b>ver notas 2 e 3</b> ) .....	3 pontos
$15x + 300y \leq 16\,500$ ( <b>ver notas 2 e 3</b> ) .....	3 pontos
$x \geq 0$ .....	1 ponto
$y \geq 0$ .....	1 ponto
Representar graficamente a região admissível .....	7 pontos
Representar graficamente a reta de equação $x = 2y$ .....	1 ponto
Representar graficamente a reta de equação $x = 600$ .....	1 ponto
Representar graficamente a reta de equação $15x + 300y = 16\,500$ .....	2 pontos
Assinalar o polígono .....	3 pontos
Calcular o número de minutos, por mês, de publicidade a efetuar na rádio e o número de minutos, por mês, de publicidade a efetuar na televisão, correspondentes à solução do problema .....	9 pontos
Obter as coordenadas dos vértices do polígono que não pertencem aos eixos coordenados $((100, 50)$ e $(600, 25))$ ..... (2 + 2) .....	4 pontos
Calcular o valor da função objetivo em cada um dos vértices da região admissível (ou implementar o método da paralela à reta de nível zero) ( <b>ver notas 4 e 5</b> ) .....	3 pontos
Indicar os valores pedidos (100 minutos, por mês, de publicidade a efetuar na rádio e 50 minutos, por mês, de publicidade a efetuar na televisão) .....	2 pontos

### Notas:

1. Se, em alguma das condições, for utilizado incorretamente apenas o símbolo «<», em vez do símbolo «≤», ou o símbolo «>», em vez do símbolo «≥», a pontuação a atribuir a esta etapa deverá ser desvalorizada em 1 ponto, no total.
2. Se, na condição, for utilizado incorretamente apenas o símbolo «=», em vez do símbolo «≥» (ou em vez do símbolo «≤»), a pontuação a atribuir a este passo deverá ser desvalorizada em 2 pontos.
3. Se, na condição, for utilizado incorretamente apenas o símbolo «≤», em vez do símbolo «≥», ou o símbolo «≥», em vez do símbolo «≤», a pontuação a atribuir a este passo deverá ser desvalorizada em 2 pontos.
4. Deverá ser atribuído 1 ponto ao cálculo do valor da função objetivo em cada um dos vértices do polígono que define a região admissível, com exceção da origem.
5. No caso de ser implementado o método da paralela à reta de nível zero e se apenas for representada, corretamente, esta reta, a pontuação a atribuir a este passo deverá ser 2 pontos.

## GRUPO II

**1.1.** ..... **10 pontos**

- Representar graficamente a função  $\tilde{N}$ , extensão da função  $N$ , definida por  $\tilde{N}(x) = \frac{1950 e^{-0,019x}}{(6,25 e^{-0,019x} + 1)^2}$ , cujo domínio seja  $[1; 365]$  ou um intervalo  $I$ , com  $[1; 365] \subset I \subset \mathbb{R}_0^+$  ..... 3 pontos
- Respeitar a forma do gráfico ..... 2 pontos
- Respeitar o domínio ..... 1 ponto
- Assinalar o ponto do gráfico de abcissa 365 ..... 2 pontos
- Obter  $N(365)$  (1,874...) ..... 2 pontos
- Indicar o menor número de telemóveis MR vendidos num só dia (187) ..... 1 ponto
- Apresentar o valor pedido (7613) (**ver nota**) ..... 2 pontos

**Nota** – Se for apresentado o valor – 7613, a pontuação a atribuir a esta etapa deverá ser 1 ponto.

**1.2.** ..... **15 pontos**

- Reconhecer que o problema se pode traduzir pela condição  $N(t) < 50$  (ou equivalente) (**ver nota**) ..... 1 ponto
- Representar graficamente a função  $\tilde{N}$ , extensão da função  $N$ , definida por  $\tilde{N}(x) = \frac{1950 e^{-0,019x}}{(6,25 e^{-0,019x} + 1)^2}$ , cujo domínio seja  $[1; 365]$  ou um intervalo  $I$ , com  $[1; 365] \subset I \subset \mathbb{R}_0^+$  (**ver nota**) ..... 3 pontos
- Respeitar a forma do gráfico ..... 2 pontos
- Respeitar o domínio ..... 1 ponto
- Representar graficamente a reta de equação  $y = 50$  (**ver nota**) ..... 1 ponto
- Assinalar os pontos de intersecção da reta com o gráfico de  $\tilde{N}$  (**ver nota**) ..... 1 ponto
- Obter as abcissas desses pontos de intersecção (23,629... e 169,273...) (**ver nota**) ..... 4 pontos
- Apresentar um processo que permita obter o número de dias do ano de 2013 em que foram vendidos menos de 5000 telemóveis MR (**ver nota**) ..... 4 pontos
- Apresentar o valor pedido (219 dias) (**ver nota**) ..... 1 ponto

**Nota** – Se, em vez de « $N(t) < 50$ », for considerado « $N(t) < 5000$ » ou « $N(t) < 500$ », a pontuação máxima a atribuir ao conjunto destas etapas deverá ser 4 pontos (0+3+1+0+0+0+0); se for considerado « $N(t) < 5$ », a pontuação máxima a atribuir ao conjunto destas etapas deverá ser 10 pontos (0+3+1+1+2+2+1).

**2.1. .... 10 pontos**

Referir que não é possível existir um instante  $t$  no qual a taxa de variação instantânea da função  $G$  seja negativa ..... 2 pontos

Apresentar uma justificação ..... 8 pontos

Esta etapa pode ser resolvida por, pelo menos, dois processos.

**1.º Processo**

Referir que a função  $G$  é não decrescente (**ver nota**) ..... 3 pontos

Relacionar a monotonia da função  $G$  com o sinal da taxa de variação instantânea da função  $G$  ..... 5 pontos

**Nota** – Se, em vez de ser referido que «a função  $G$  é não decrescente», for referido que «a função  $G$  é crescente» ou que « $G$  é uma função cumulativa», a pontuação a atribuir a este passo não deverá ser desvalorizada.

**2.º Processo**

Referir que a taxa de variação instantânea da função  $G$ , no instante  $t$ , representa o número aproximado, em centenas, de telemóveis vendidos nesse instante ..... 5 pontos

Referir que o número, em centenas, de telemóveis vendidos num dado instante não pode ser negativo ..... 3 pontos

**2.2. .... 20 pontos**

Tópicos de resposta:

- justificar a veracidade da afirmação I (reconhecer que  $F(0) = G(0) - 3$ , ou equivalente);
- justificar a falsidade da afirmação II (reconhecer que  $G(4) - G(0) < 18,59$ , ou equivalente);
- justificar a veracidade da afirmação III (reconhecer que a reta de equação  $y = 27$  é assíntota do gráfico de  $F$ , ou equivalente).

Níveis	Descritores do nível de desempenho	Pontuação
6	Na resposta, são apresentados os três tópicos com organização coerente dos conteúdos e linguagem científica adequada.	20
5	Na resposta, são apresentados três tópicos com falhas na organização dos conteúdos ou falhas na linguagem científica.	17
4	Na resposta, são apresentados dois tópicos com organização coerente dos conteúdos e linguagem científica adequada.	14
3	Na resposta, são apresentados dois tópicos com falhas na organização dos conteúdos ou falhas na linguagem científica.	11
2	Na resposta, é apresentado um tópico com linguagem científica adequada.	8
1	Na resposta, é apresentado um tópico com falhas na linguagem científica.	5

Exemplo de resposta:

*De acordo com o modelo apresentado, o número aproximado, em centenas, de telemóveis MR vendidos em Faro, desde o dia do lançamento até às zero horas do dia 1 de janeiro de 2013, é dado por  $G(0) - 3$ . Assim, venderam-se, no total, mais três centenas de telemóveis MR em Guimarães do que em Faro, pelo que a afirmação I é verdadeira.*

*$G(4)$  é o número aproximado, em centenas, de telemóveis MR vendidos em Guimarães, até ao final do quarto mês do ano de 2013, incluindo o número aproximado, em centenas, de telemóveis MR vendidos desde o dia do lançamento até às zero horas do dia 1 de janeiro de 2013. Assim, o número de telemóveis MR vendidos em Guimarães nos primeiros quatro meses do ano de 2013 é inferior a 1859 (dado que  $G(4) - G(0) < 18,59$ ), pelo que a afirmação II é falsa.*

*A reta de equação  $y = 30$  é assíntota horizontal do gráfico de  $G$  e, como  $F(t) = G(t) - 3$ , a reta de equação  $y = 27$  é assíntota horizontal do gráfico de  $F$ . Assim, enquanto o modelo for válido, o número de telemóveis MR vendidos em Faro, desde o dia do lançamento, não irá ultrapassar os 2700 exemplares, pelo que não atingirá as 2800 unidades. Portanto, a afirmação III é verdadeira.*

### GRUPO III

1.1.1. .... **5 pontos**

Tópicos de resposta:

- I. justificar que a correlação é forte (referir que  $|r|$  é próximo de 1, ou equivalente);
- II. justificar que a correlação é negativa (referir que o sinal de  $r$  é negativo, ou equivalente).

Níveis	Descritores do nível de desempenho	Pontuação
3	Na resposta, são apresentados corretamente os dois tópicos.	5
2	Na resposta, é apresentado corretamente apenas o tópico I.	3
1	Na resposta, é apresentado corretamente apenas o tópico II.	2

1.1.2. .... **10 pontos**

Tópicos de resposta:

- I. reconhecer que «altitude» é a variável explicativa e que «média anual das temperaturas máximas» é a variável resposta;
- II. interpretar corretamente o sinal de  $r$
- III. reconhecer que a variável explicativa tende a influenciar a variável resposta.

Níveis	Descritores do nível de desempenho	Pontuação
5	Na resposta, são apresentados corretamente os três tópicos.	10
4	Na resposta, são apresentados corretamente apenas os tópicos I e II.	8
3	Na resposta, são apresentados corretamente apenas os tópicos I e III ou apenas os tópicos II e III.	6
2	Na resposta, é apresentado corretamente apenas o tópico I ou apenas o tópico II.	4
1	Na resposta, é apresentado corretamente apenas o tópico III.	2

Exemplo de resposta:

*O valor de  $r$  indica que, quando aumenta a altitude, a média anual das temperaturas máximas tende a diminuir.*

1.2. .... **15 pontos**

- Apresentar os casos possíveis..... 5 pontos
- Apresentar os casos favoráveis ..... 4 pontos
- Indicar o número de casos possíveis (8) ..... 1 ponto
- Indicar o número de casos favoráveis (6) ..... 1 ponto
- Reconhecer que a probabilidade é  $\frac{6}{8}$  (ou equivalente) ..... 2 pontos
- Apresentar o valor pedido (75%) ..... 2 pontos

**2.1. .... 15 pontos**

Reconhecer que janeiro, fevereiro e dezembro correspondem, respetivamente, a  $t = 1$ , a  $t = 2$  e a  $t = 12$  ..... (1 + 1 + 1) ..... 3 pontos

Apresentar os valores de  $|L(t) - B(t)|$ , para  $t \in \{1, 2, 12\}$  (ver nota) ..... (3 + 3 + 3) ..... 9 pontos

Concluir que a maior diferença, em valor absoluto, entre as médias mensais das temperaturas máximas registadas nas duas cidades ocorre em janeiro ..... 3 pontos

**Nota** – Caso sejam apresentados os valores de  $B(t) - L(t)$ , para  $t \in \{1, 2, 12\}$ , sem que sejam apresentados os respetivos valores absolutos, a pontuação máxima a atribuir a esta etapa deverá ser 6 pontos; caso sejam apresentados os valores de  $B(t)$  e os valores de  $L(t)$ , para  $t \in \{1, 2, 12\}$ , sem que sejam efetuadas as respetivas diferenças, a pontuação máxima a atribuir a esta etapa deverá ser 3 pontos.

**2.2. .... 15 pontos**

Equacionar o problema ( $B(t) = L(t)$  ou equivalente) ..... 2 pontos

Resolver a equação anterior ..... 10 pontos

Esta etapa pode ser resolvida por, pelo menos, dois processos.

**1.º Processo**

Apresentar uma tabela contendo os valores de  $B(1), \dots, B(12)$  e de  $L(1), \dots, L(12)$  (ver nota) ... (4 + 4) ... 8 pontos

Referir que  $B(t) \neq L(t)$ , para cada valor de  $t \in \{1, 2, 3, \dots, 12\}$  2 pontos

**Nota** – Deverá ser atribuído um ponto por cada conjunto de três valores corretos.

**2.º Processo**

Representar graficamente as funções  $\tilde{B}$  e  $\tilde{L}$ , extensões, respetivamente, da função  $B$  e da função  $L$ , definidas por  $\tilde{B}(x) = 18,48 + 9,33 \text{ sen}(0,56x - 2,5)$  e por  $\tilde{L}(x) = 23,37 + 6,16 \text{ sen}(0,49x + 1,23)$ , ambas de domínio  $[1; 12]$ , ou um intervalo  $I$ , com  $[1; 12] \subset I \subset \mathbb{R}_0^+$  ..... 3 pontos

Respeitar a forma do gráfico de cada função .. (1 + 1) .. 2 pontos

Respeitar o domínio ..... 1 ponto

Assinalar os pontos de intersecção dos gráficos de  $\tilde{B}$  e de  $\tilde{L}$  ... 1 ponto

Obter as abcissas desses pontos (4,8665... e 9,5575...) ..(2 + 2).. 4 pontos

Referir que nenhuma das abcissas é um valor inteiro compreendido entre 1 e 12 ..... 2 pontos

Concluir que em nenhum dos meses do ano as médias referidas são iguais ..... 3 pontos

## GRUPO IV

**1.1.** ..... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

**1.º Processo**

Obter o raio da <i>circunferência um</i> (5 cm) .....	1 ponto
Obter o raio da <i>circunferência vinte</i> (100 cm) .....	2 pontos
Converter centímetros em metros .....	1 ponto
Obter a área do conjunto I .....	1 ponto
Obter a soma das áreas dos conjuntos I, II e III .....	2 pontos
Reconhecer que o lado do quadrado que circunscreve os conjuntos I, II e III mede 3 m .....	3 pontos
Obter a área desse quadrado ( $9 \text{ m}^2$ ) .....	1 ponto
Escrever uma expressão da área pedida ( $9 - 2\pi$ ou equivalente) .....	2 pontos
Apresentar o valor pedido ( $2,7 \text{ m}^2$ ) .....	2 pontos

**2.º Processo**

Obter o raio da <i>circunferência um</i> (5 cm) .....	1 ponto
Obter o raio da <i>circunferência vinte</i> (100 cm) .....	2 pontos
Converter centímetros em metros .....	1 ponto
Reconhecer que o quadrado que circunscreve os conjuntos I, II e III se pode dividir em nove quadrados de lado igual ao raio da <i>circunferência vinte</i> .....	3 pontos
Obter a área dos nove quadrados ( $9 \text{ m}^2$ ) .....	1 ponto
Obter a área do conjunto I .....	1 ponto
Obter a soma das áreas dos conjuntos I, II e III .....	2 pontos
Escrever uma expressão da área pedida ( $9 - 2\pi$ ou equivalente) .....	2 pontos
Apresentar o valor pedido ( $2,7 \text{ m}^2$ ) .....	2 pontos

**1.2.1.** ..... **10 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

**1.º Processo**

Reconhecer que $A_{n+1} - A_n$ tem de ser igual a $50\pi$ , para todo o $n$ natural	2 pontos
Substituir $n$ por $n + 1$ na expressão de $A_n$ .....	1 ponto
Obter $A_{n+1} - A_n$ .....	7 pontos
Escrever $(50\pi(n + 1) - 25\pi) - (50\pi n - 25\pi)$ (ou equivalente)	2 pontos
Desembaraçar a expressão anterior de parênteses .....	3 pontos
Concluir que a expressão anterior é igual a $50\pi$ .....	2 pontos

## 2.º Processo

Reconhecer que $A_1$ é o primeiro termo de uma progressão aritmética .....	2 pontos
Indicar o valor de $A_1$ ( $25\pi$ ) .....	1 ponto
Escrever $25\pi + (n - 1) \times 50\pi$ (ou equivalente) .....	4 pontos
Obter $50\pi n - 25\pi$ .....	3 pontos

1.2.2. .... 15 pontos

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

### 1.º Processo

Reconhecer que, relativamente ao conjunto I, as áreas das regiões pintadas com tinta preta correspondem a $A_2, A_4, A_6, A_8, A_{10}, A_{12}, A_{14}, A_{16}, A_{18}, A_{20}$ ..	2 pontos
Calcular $A_2 + A_4 + A_6 + A_8 + A_{10} + A_{12} + A_{14} + A_{16} + A_{18} + A_{20}$ .....	8 pontos

Esta etapa pode ser resolvida por, pelo menos, dois processos.

#### Processo A

Reconhecer que $A_2, A_4, \dots, A_{20}$ são os dez primeiros termos consecutivos de uma progressão aritmética .....	3 pontos
Obter $A_2$ .....	1 ponto
Obter $A_{20}$ .....	1 ponto
Escrever $\frac{75\pi + 975\pi}{2} \times 10$ (ou equivalente) .....	2 pontos
Obter o valor da expressão anterior ( $5250\pi \text{ cm}^2$ ou $16\,493,3614\dots \text{ cm}^2$ ) .....	1 ponto

#### Processo B

Obter $A_2, A_4, \dots, A_{20}$ ( $75\pi, 175\pi, \dots, 975\pi$ ou equivalente) ( <b>ver nota</b> ) .....	5 pontos
Escrever $75\pi + 175\pi + \dots + 975\pi$ (ou equivalente) .....	2 pontos
Obter o valor da expressão anterior ( $5250\pi \text{ cm}^2$ ou $16\,493,3614\dots \text{ cm}^2$ ) .....	1 ponto
Calcular a área total das regiões do logotipo pintadas com tinta preta ( $10\,500\pi \text{ cm}^2$ ou $32\,986,7228\dots \text{ cm}^2$ ) .....	2 pontos
Calcular a quantidade total de tinta preta gasta na pintura dessas regiões (420 cl)	2 pontos
Apresentar o valor pedido (4,2 l) .....	1 ponto

**Nota** – Deverá ser atribuído 1 ponto por cada conjunto de dois valores corretos.

### 2.º Processo

Reconhecer que, relativamente ao conjunto I, as áreas das regiões pintadas com tinta preta correspondem a $A_2, A_4, A_6, A_8, A_{10}, A_{12}, A_{14}, A_{16}, A_{18}, A_{20}$ ..	2 pontos
Calcular a quantidade total de tinta preta gasta na pintura dessas regiões .....	10 pontos

Esta etapa pode ser resolvida por, pelo menos, dois processos.

**Processo A**

- Obter  $A_2$  ..... 1 ponto
- Calcular a quantidade de tinta preta gasta na pintura da região correspondente a  $A_2$  (3 cl)..... 2 pontos
- Reconhecer que as quantidades de tinta preta gastas na pintura das regiões correspondentes a  $A_2, A_4, \dots, A_{20}$  são os dez primeiros termos consecutivos de uma progressão aritmética de razão 4 cl (**ver nota 1**) ..... 3 pontos
- Obter o décimo termo (39 cl) (**ver nota 1**) ..... 1 ponto
- Escrever  $\frac{3+39}{2} \times 10$  (ou equivalente) ..... 2 pontos
- Obter o valor da expressão anterior (210 cl) ..... 1 ponto

**Processo B**

- Calcular as quantidades de tinta preta gastas na pintura das regiões correspondentes a  $A_2, A_4, \dots, A_{20}$  (3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, 39) (**ver nota 2**) ..... 7 pontos
- Escrever  $3 + 7 + 11 + \dots + 39$  ..... 2 pontos
- Obter o valor da expressão anterior (210 cl) ..... 1 ponto
- Calcular  $210 \times 2$  (420 cl) ..... 2 pontos
- Apresentar o valor pedido (4,2 l) ..... 1 ponto

**Notas:**

1. Caso não seja reconhecido que a razão da progressão é 4 cl mas seja obtido corretamente o décimo termo, a pontuação correspondente a estes dois passos deverá ser atribuída.
2. Pelo cálculo correto da quantidade de tinta preta gasta na pintura das regiões correspondentes a:  $A_2$ , deverão ser atribuídos 2 pontos;  $A_4$ , deverá ser atribuído 1 ponto;  $A_6$  e  $A_8$ , deverá ser atribuído 1 ponto;  $A_{10}$  e  $A_{12}$ , deverá ser atribuído 1 ponto;  $A_{14}$  e  $A_{16}$ , deverá ser atribuído 1 ponto;  $A_{18}$  e  $A_{20}$ , deverá ser atribuído 1 ponto.

**2. .... 15 pontos**

- Escrever uma expressão da área do círculo de centro no ponto  $O$  e raio  $a$  ( $\pi a^2$ ) 1 ponto
- Escrever uma expressão da área do círculo de centro no ponto  $O$  e raio  $b$  ( $\pi b^2$ ) 1 ponto
- Escrever uma expressão da área da coroa circular ( $\pi b^2 - \pi a^2$ ) ..... 3 pontos
- Reconhecer que o triângulo  $[OPQ]$  é um triângulo retângulo em  $P$  ..... 2 pontos
- Escrever  $a^2 + \overline{PQ}^2 = b^2$  ..... 2 pontos
- Obter  $\overline{PQ}^2 = b^2 - a^2$  ..... 2 pontos
- Escrever uma expressão da área do círculo de centro no ponto  $P$  e raio  $\overline{PQ}$ , em função de  $a$  e de  $b$  ( $\pi(b^2 - a^2)$ ) ..... 2 pontos
- Concluir que a área da coroa circular é igual à área do círculo de centro no ponto  $P$  e raio  $\overline{PQ}$  ..... 2 pontos

## COTAÇÕES

### GRUPO I

.....	30 pontos
	<hr/>
	<b>30 pontos</b>

### GRUPO II

1.		
1.1.	.....	10 pontos
1.2.	.....	15 pontos
2.		
2.1.	.....	10 pontos
2.2.	.....	20 pontos
		<hr/>
		<b>55 pontos</b>

### GRUPO III

1.		
1.1.		
1.1.1.	.....	5 pontos
1.1.2.	.....	10 pontos
1.2.	.....	15 pontos
2.		
2.1.	.....	15 pontos
2.2.	.....	15 pontos
		<hr/>
		<b>60 pontos</b>

### GRUPO IV

1.		
1.1.	.....	15 pontos
1.2.		
1.2.1.	.....	10 pontos
1.2.2.	.....	15 pontos
2.	.....	15 pontos
		<hr/>
		<b>55 pontos</b>

**TOTAL** ..... **200 pontos**