

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA A DO ENSINO SECUNDÁRIO

(CÓDIGO DA PROVA 635) – 1.ª FASE – 26 DE JUNHO DE 2024

1.

O contradomínio da função f é $[-1, 3]$ e a função g é definida por $g(x) = f(x-2) + 1$.

Tem-se que:

- $g_1(x) = f(x-2) \rightarrow$ corresponde a uma translação associada ao vetor $\vec{u}(2,0)$, ou seja, deslocamento horizontal de duas unidades para a direita, pelo que o contradomínio de g_1 é o mesmo do que o contradomínio de f ;
- $g(x) = g_1(x) + 1 = f(x-2) + 1 \rightarrow$ corresponde a uma translação associada ao vetor $\vec{v}(0,1)$ (deslocamento vertical de uma unidade para cima), pelo que o contradomínio da função g é $[-1+1, 3+1] = [0,4]$.

Resposta correta: (C)

2.

2.1.

Considere-se os seguintes acontecimentos:

A : “Ser candidato a violinista” e B : “Ser candidato português”.

Sabe-se que:

$$P(A) = \frac{3}{5}, \quad P(B) = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad P(\bar{A}|\bar{B}) = \frac{3}{10}$$

Desenvolvendo a probabilidade condicionada dada, temos que:

$$P(\bar{A}|\bar{B}) = \frac{3}{10} \Leftrightarrow \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{3}{10} \Leftrightarrow P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{10} \Leftrightarrow 1 - P(A \cup B) = \frac{3}{20} \Leftrightarrow P(A \cup B) = \frac{17}{20}$$

Para se determinar $P(A \cap B)$, temos:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{3}{5} + \frac{1}{2} - \frac{17}{20} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

Desta forma, a probabilidade de se seleccionar um candidato ao acaso e esse ser português, sabendo-se que é violinista, é:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Leftrightarrow P(B|A) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{5}} \Leftrightarrow P(B|A) = \frac{5}{12}$$

2.2.

Sabendo que os três contrabaixistas se dispõem numa única fila; havendo só duas filas, há duas formas de se escolher a fila. 4A_3 Corresponde às diferentes formas de distribuir os três contrabaixistas pelos 4 lugares da fila escolhida. Quanto aos restantes músicos, estes permutam-se pelos lugares ainda existentes, ou seja, $5!$. Assim, a expressão correspondente ao número de maneiras diferentes de dispor os oito músicos, ficando os três contrabaixistas numa fila é:

$$2 \times {}^4A_3 \times 5!$$

Resposta correta: (B)

2.3.

Como, em cada dia, excetuando-se o primeiro, a Constança praticou mais 10 minutos em relação ao dia anterior, pode-se recorrer a uma progressão aritmética de razão 10 ($r=10$). Sendo que, os 60 minutos praticados no quarto dia correspondem ao quarto termo desta sucessão. Os 2970 minutos referentes ao total dos m dias corresponde à soma dos m primeiros termos desta progressão.

Assim, considera-se (u_n) a progressão aritmética cujos termos são referentes ao número de minutos praticados pela Constança por dia.

Sabe-se que:

$$u_4 = 60, \quad r = 10 \quad \text{e} \quad S_m = 2970$$

De forma a obter o termo geral da progressão aritmética, temos:

$$u_n = u_4 + (n-4) \times 10 \Leftrightarrow u_n = 60 + 10n - 40 \Leftrightarrow u_n = 10n + 20$$

Para determinar a soma dos m primeiros termos da progressão, vem que: $u_1 = 10 \times 1 + 20 \Leftrightarrow u_1 = 30$.

Assim,

$$\begin{aligned} S_m = 2970 &\Leftrightarrow \frac{u_1 + u_m}{2} \times m = 2970 \Leftrightarrow \frac{30 + 10m + 20}{2} \times m = 2970 \Leftrightarrow (25 + 5m) \times m = 2970 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 5m^2 + 25m - 2970 = 0 \Leftrightarrow m^2 + 5m - 594 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 1 \times (-594)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow m = -27 \vee m = 22 \end{aligned}$$

e como $m \in \mathbb{N}$ então, $m = 22$.

3.

3.1.

Como a reta BC é perpendicular ao plano ABF , tem-se que o vetor de coordenadas $(2, 3, 6)$ é normal ao plano ABF e assim, este pode ser dado por:

$$2x + 3y + 6z + d = 0, d \in \mathbb{R}$$

Substituindo o ponto $A(4, -4, -3)$ na equação considerada, obtém-se:

$$2 \times 4 + 3 \times (-4) + 6 \times (-3) + d = 0 \Leftrightarrow d = 22$$

Tem-se assim que o plano ABF pode ser dado por:

$$2x + 3y + 6z + 22 = 0$$

Resposta correta: (A)

3.2.

Sabe-se que qualquer ponto da reta BC é da forma $(3 + 2k, 5 + 3k, 1 + 6k)$, $k \in \mathbb{R}$ e como o ponto B tem a ordenada igual ao dobro da abcissa, temos:

$$5 + 3k = 2 \times (3 + 2k) \Leftrightarrow 5 + 3k = 6 + 4k \Leftrightarrow k = -1$$

Assim, $B(3 - 2, 5 - 3, 1 - 6) = (1, 2, -5)$, pelo que $\overrightarrow{OA}(4, -4, -3)$ e $\overrightarrow{OB}(1, 2, -5)$

Então,

$$\cos(\widehat{AOB}) = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{\|\overrightarrow{OA}\| \times \|\overrightarrow{OB}\|} = \frac{4 \times 1 - 4 \times 2 - 3 \times (-5)}{\sqrt{4^2 + (-4)^2 + (-3)^2} \times \sqrt{1^2 + 2^2 + (-5)^2}} = \frac{11}{\sqrt{41} \times \sqrt{30}} = \frac{11}{\sqrt{1230}}$$

Logo,

$$\widehat{AOB} = \cos^{-1}\left(\frac{11}{\sqrt{1230}}\right) \approx 72^\circ$$

3.3.

Como o número de casos possíveis é ${}^4C_2 \times {}^4C_2 = 36$ e o número de casos favoráveis é ${}^4C_2 \times {}^4C_2 - 4 = 32$, então aplicando a regra de Laplace, a probabilidade pedida, p , é dada por:

$$p = \frac{32}{36} = \frac{8}{9}$$

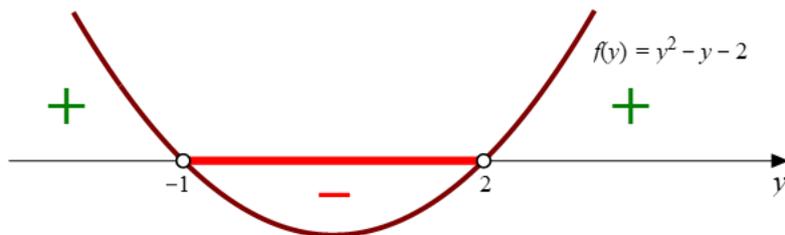
4.

O domínio de validade da condição é $D = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = \mathbb{R}^+$.

Fazendo $y = \ln x$, a inequação fica, $y^2 - y - 2 < 0$.

Determinando os zeros: $y^2 - y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow y = -1 \vee y = 2$

Esboçando o gráfico da função quadrática f , definida por $f(y) = y^2 - y - 2$:



Portanto,

$$\begin{aligned} y^2 - y - 2 < 0 &\Leftrightarrow y > -1 \wedge y < 2 \Leftrightarrow \underset{y = \ln x}{\ln x} > -1 \wedge \ln x < \underset{\substack{-1 = \ln e^{-1} \\ 2 = \ln e^2}}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x > \frac{1}{e} \wedge x < e^2 \end{aligned}$$

Intersectando com o domínio (figura não à escala):



Portanto, o conjunto solução da condição é $\mathbb{R}^+ \cap \left(\left[\frac{1}{e}, e^2 \right] \right) = \left] \frac{1}{e}, e^2 \right[$.

5.

5.1.

Para estudar a função g quanto à monotonia, determinemos a expressão analítica da primeira derivada de g no intervalo $]1, +\infty[$:

$$\begin{aligned}g'(x) &= (x^2 - 3x - 2\ln x)' = \\ &= 2x - 3 - 2 \times \frac{1}{x} = \\ &= \frac{2x^2 - 3x - 2}{x}\end{aligned}$$

Calculando os zeros da função derivada, no intervalo $]1, +\infty[$, vem:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 3x - 2}{x} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \vee x = 2$$

po que, 2 é a única solução neste intervalo.

Estudando a variação do sinal da função derivada, em $]1, +\infty[$, e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	1		2	$+\infty$
$2x^2 - 3x - 2$	n. d.	-	0	+
x	n. d.	+	+	+
g'	n. d.	-	0	+
g	n. d.		Min.	

Assim, podemos concluir que o valor mínimo da função g é atingido quando $x = 2$, ou seja,

$$g(2) = (2^2 - 3 \times 2 - 2\ln 2) = 4 - 6 - \ln 2^2 = -2 - \ln 4.$$

A função é monótona decrescente em $]1, 2]$, monótona crescente em $[2, +\infty[$ e tem um mínimo igual a $-2 - \ln 4$.

5.2.

A função g é contínua em $x=1$ se $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = g(1)$.

Assim, estudemos:

- $g(1) = 1^2 - 3 \times 1 - 2 \ln(1) = 1 - 3 - 2 \times 0 = -2$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 3x - 2 \ln x) = 1^2 - 3 \times 1 - 2 \ln(1) = 1 - 3 - 2 \times 0 = -2$
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{1-x}{e^{x-1} - 1} - e^{x-k} \right) \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)}{e^{x-1} - 1} - \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{x-k} = - \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{e^{x-1} - 1} - e^{1-k} =$

$$= - \lim_{\substack{y=x-1 \\ x \rightarrow 1^- \Rightarrow y \rightarrow 0^-}} \frac{y}{e^y - 1} - e^{1-k} = - \frac{1}{\underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^y - 1}{y}}_{\text{Limite notável}}} - e^{1-k} = -\frac{1}{1} - e^{1-k} = -1 - e^{1-k}$$

Logo, $-1 - e^{1-k} = -2 \Leftrightarrow -e^{1-k} = -2 + 1 \Leftrightarrow -e^{1-k} = -1 \Leftrightarrow e^{1-k} = 1 \Leftrightarrow 1 - k = \ln 1 \Leftrightarrow 1 - k = 0 \Leftrightarrow k = 1$.

6.

A percentagem de alunos com classificação inferior a 13 é $5 + 15 + 10 = 30\%$. Portanto, $0,30 \times 20 = 6$ alunos tiveram classificação inferior a 13, pelo que **I** \rightarrow **b**).

Introduzindo os dados numa calculadora, vamos determinar a mediana, a média e o desvio-padrão. Podemos, primeiro, construir uma tabela de frequências absolutas:

Classificações	Frequência Relativa	Frequência Absoluta
8	5%	$0,05 \times 20 = 1$
10	15%	$0,15 \times 20 = 3$
12	10%	$0,10 \times 20 = 2$
13	20%	$0,20 \times 20 = 4$
14	25%	$0,25 \times 20 = 5$
17	20%	$0,20 \times 20 = 4$
20	5%	$0,05 \times 20 = 1$

Assim, a mediana é 13,5, a média é 13,6 e o desvio-padrão é, aproximadamente, 2,9. Na tabela seguinte apresentam-se os valores obtidos com as diferentes calculadoras:

TI-Nspire CX II-T	CASIO FX-CG50	NUMWORKS

Portanto, I → b), II → c), III → b) e IV → a).

7.

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Como a função f é o quociente entre duas funções contínuas em \mathbb{R} , a função é contínua no seu domínio, logo a única candidata a assíntota vertical é a reta de equação $x = 0$.

Estudemos a existência de assíntotas verticais:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^4(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^4(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^4(1 + \cos x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} = 1 \times 1 \times \frac{1}{0^+} \times \frac{1}{1 + \cos 0} = +\infty \times \frac{1}{2} = +\infty \end{aligned}$$

Assim, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$, pelo que a única assíntota vertical ao gráfico da função f é a reta de equação $x = 0$.

8.

$$D_f = \mathbb{R}$$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, $a \neq 2 \rightarrow$ a função é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \text{ com } f(2) > 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$$

$$f(x) \times f(3) < 0$$

I) A função não é contínua para $x = 2$, uma vez que $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, logo não é possível recorrer ao Teorema de Bolzano-Cauchy pois a função não é contínua em $[1, 3]$ (não é contínua em $x = 2$ que pertence ao intervalo). Assim, apesar de $f(1) \times f(3) < 0$, não podemos garantir que a função f tem pelo menos um zero no intervalo $]1, 3[$, pelo que a afirmação é falsa.

II) Para que a reta de equação $x = 2$ seja assíntota vertical ao gráfico da função $\frac{1}{f}$ é necessário que:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{f(x)} = \pm \infty \text{ ou } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{f(x)} = \pm \infty, \text{ o que não se verifica pois:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{-\infty} = 0 \text{ (número real)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f(2)}, \text{ como } f(2) > 0, \text{ número real positivo, logo este limite não é infinito, pois também}$$

será um número real positivo.

Como nenhum dos limites é infinito, a afirmação é falsa.

9.

A área do sector circular de raio 2 é dada por: $\frac{\alpha \times 2^2}{2} = 2\alpha$.

Observando que que:

$$A(2, 0), \quad B(2 \cos \alpha, 2 \operatorname{sen} \alpha), \quad C(-2 \cos \alpha, 2 \operatorname{sen} \alpha), \quad D(-2 \cos \alpha, 0)$$

A área do trapézio $[OBCD]$ é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{OD} + \overline{CB}}{2} \times \overline{CD} &= \frac{2 \cos \alpha + 2(2 \cos \alpha)}{2} \times 2 \operatorname{sen} \alpha = (\cos \alpha + 2 \cos \alpha) \times 2 \operatorname{sen} \alpha \\ &= 2 \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha + 2(2 \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha) = \\ &= \operatorname{sen}(2\alpha) + 2 \operatorname{sen}(2\alpha) = 3 \operatorname{sen}(2\alpha) \end{aligned}$$

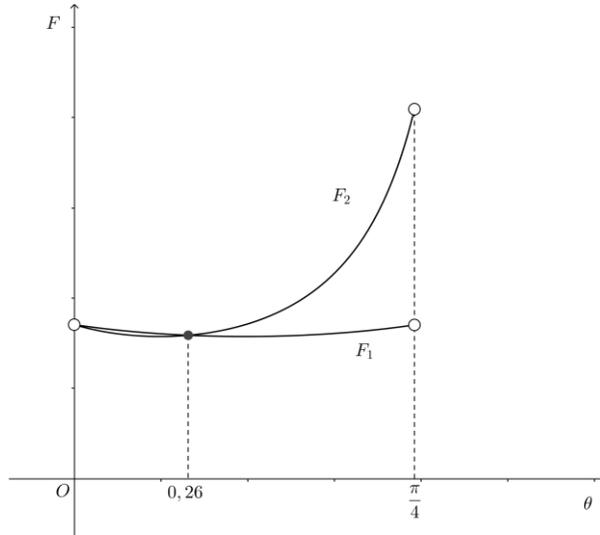
A área sombreada resulta da soma destas duas áreas ou seja $2\alpha + 3 \operatorname{sen}(2\alpha)$, como queríamos mostrar.

10.

A equação que permite resolver o problema é $F(\theta) = F(2\theta)$ (ou uma equivalente).

Assim, considerando $F_1 = F(\theta)$ e $F_2 = F(2\theta)$, determinamos o ponto de interseção dos gráficos das duas funções com o auxílio da calculadora gráfica.

Como $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ obtemos a seguinte representação gráfica:



Logo o valor de θ , solução deste problema, em radianos e arredondado às centésimas, é 0,26.

11.

Como o ponto A pertence ao semieixo imaginário negativo e à circunferência de raio 2 centrada na origem, então corresponde ao número complexo $z_A = -2i$.

Como este número complexo é uma raiz cúbica de w , então $z_A^3 = w$.

Logo,

$$z_A^3 = (-2i)^3 = -8i^3 = 8i = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Resposta correta: (C)

12.

$$\begin{aligned} z &= \frac{4}{1+i} - \frac{2}{i^7} = \frac{4(1-i)}{(1+i)(1-i)} - \frac{2}{i^3 \times i^4} = \frac{4-4i}{1+1} - \frac{2}{i^3} = \frac{4-4i}{2} - \frac{2}{-i} = 2 - 2i - \frac{2i}{1} = 2 - 2i - 2i = \\ &= 2 - 4i \end{aligned}$$

C.A.

$$i^7 = i^3 \times i^4 = i^3 = i \times i^2 = -i$$

Seja $w = a + bi$; $a, b \in \mathbb{R}$.

Calculemos, na forma algébrica, o complexo zw .

Ora, como o afixo de zw pertence à bissetriz do terceiro quadrante, temos que

$$\operatorname{Re}(zw) = \operatorname{Im}(zw), \text{ com } \operatorname{Re}(zw) < 0 \text{ e } \operatorname{Im}(zw) < 0.$$

Assim,

$$zw=(2-4i).(a+bi)=2a+2bi-4ai-4bi^2=(2a+4b)+(2b-4a)i$$

$$\text{Como } \operatorname{Re}(zw)=\operatorname{Im}(zw) \Leftrightarrow 2a+4b=2b-4a \Leftrightarrow 6a=-2b \Leftrightarrow b=-3a$$

Donde,

$$zw=(2-4i).(a+bi)=(2a+4b)+(2b-4a)i=(2a-12a)+(-6a-4a)i=-10a-10ai.$$

Por outro lado,

$$|zw|=5\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{(-10a)^2+(-10a)^2}=5\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{100a^2+100a^2}=5\sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 200a^2=25 \times 2 \Leftrightarrow a^2=\frac{50}{200} \Leftrightarrow a^2=\frac{1}{4} \Leftrightarrow a=\frac{1}{2} \vee a=-\frac{1}{2}$$

Para $a=\frac{1}{2}$, temos $b=-\frac{3}{2}$

$$(2-4i).\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i\right)=1-3i-2i+6i^2=1-6-5i=-5-5i \in 3^{\circ}Q$$

Para $a=-\frac{1}{2}$, temos $b=\frac{3}{2}$

$$(2-4i).\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)=-1+3i+2i-6i^2=-1+6+5i=5+5i \in 1^{\circ}Q.$$

Como o afixo do complexo w pertence à bissetriz do 3º quadrante, temos que:

$$w=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$$

Resolução alternativa:

$$z=\frac{4}{1+i}-\frac{2}{i^7} \stackrel{i^7=i^3=-i}{=} \frac{4}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} - \frac{2}{-i} = \frac{4-4i}{1^2-i^2} + \frac{2}{i} \times \frac{-i}{-i} = \frac{4-4i}{2} - \frac{2i}{-i^2} = 2-2i-2i=2-4i$$

Como o afixo de $z \times w$ pertence à bissetriz do terceiro quadrante, um seu argumento é $\frac{5\pi}{4}$. Assim, como o seu módulo é $5\sqrt{2}$, vem que:

$$z \times w = 5\sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{4}} = 5\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right) \right) = 5\sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = -5-5i$$

Logo,

$$z \times w = -5-5i \Leftrightarrow w = \frac{-5-5i}{z} \Leftrightarrow w = \frac{-5-5i}{2-4i} \Leftrightarrow w = \frac{-5-5i}{2-4i} \times \frac{2+4i}{2+4i} \Leftrightarrow w = \frac{-10-20i-10i-20i^2}{2^2-4^2i^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow w = \frac{-10-30i+20}{4+16} \Leftrightarrow w = \frac{10-30i}{20} \Leftrightarrow w = \frac{10}{20} - \frac{30i}{20} \Leftrightarrow w = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$$

13.

$$y = mx + 1; \quad f(x) = 2x^2 + bx + 5$$

Seja a a abcissa do ponto onde a reta tangente ao gráfico de f é a reta de equação $y = mx + 1$.

Assim, $f'(a) = m$.

Ora, $f'(x) = 4x + b$ e, conseqüentemente, $f'(a) = 4a + b$.

$$4a + b = m \quad (1)$$

Por outro lado, e pelo facto de o ponto pertencer ao gráfico e à reta,

$$f(a) = 2a^2 + ba + 5 \quad \text{e} \quad f(a) = ma + 1$$

$$2a^2 + ba + 5 = ma + 1 \quad (2)$$

Assim, de (1) e de (2), resulta,

$$2a^2 + ba + 5 = (4a + b)a + 1 \Leftrightarrow 2a^2 - 4a^2 + ba + 5 - ab - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2a^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{2}.$$

Como, por hipótese, $a > 0$, concluímos que $a = \sqrt{2}$.

FIM