Proposta de resolução

1.1. O volume do paralelepípedo $[ABCDEFGH]$ é dada pelo produto da área da base vezes a altura, ou seja
$$\overline{AB} \times \overline{BG} \times \overline{BC}.$$

Para obter a área da base, vamos começar por determinar as coordenadas do ponto A.
Uma vez que A pertence ao eixo Ox, as suas coordenadas são da forma $A(a, 0, 0)$ para alguma constante $a \in \mathbb{R}$.
Substituindo na equação do plano ABC temos:
$$3 \times a + 0 - 12 = 0 \Leftrightarrow a = 4.$$
Assim, $A(4, 0, 0)$.
Como $B(0, 3, 0)$ e $C(0, 3, 6)$ então
$\overline{AB} = \sqrt{(4-0)^2 + (0-3)^2 + (0-0)^2} = 5$;
$\overline{BG} = \sqrt{(0-6)^2 + (3-11)^2 + (0-0)^2} = 10$
e o volume do paralelepípedo é $5 \times 10 \times 6 = 300$ unidades de volume.

1.2. Sabemos que um plano definido por uma equação da forma $ax + by + cz + d = 0$ admite o vetor de coordenadas $\vec{n}(a, b, c)$ como vetor normal.
Por conseguinte, $\vec{n}(3, 4, 0)$ são as coordenadas de um vetor normal ao plano ABC e
$$(x, y, z) = (1, -4, 3) + k(3, 4, 0),\ k \in \mathbb{R}$$
é uma equação vetorial da reta r.
A solução do sistema seguinte dá-nos as coordenadas do ponto de interseção da reta r com o plano ABC.
$$\begin{cases} 3x + 4y - 12 = 0 \\ (x, y, z) = (1, -4, 3) + k(3, 4, 0) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(1 + 3k) + 4(4k - 4) - 12 = 0 \\ (x, y, z) = (1 + 3k, -4 + 4k, 3) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 25k = 25 \\ --- \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ (x, y, z) = (4, 0, 3). \end{cases}$$
Logo, as coordenadas do ponto de interseção da reta r com o plano ABC são $(4, 0, 3)$.

1.3. Comecemos por notar que, para a terceira coordenada do vetor $\overrightarrow{XY}$ ser 0, este tem de ser paralelo ao plano xOy.
Assim, podemos escolher dois vértices do conjunto $\{A, B, G, H\}$ ou dois vértices do conjunto $\{C, D, E, F\}$.
Em qualquer um dos casos temos ${}^4A_2$ vetores. Por conseguinte, há ${}^4A_2 \times 2$ casos favoráveis.
Como se podem escolher dois vértices entre os oito vértices para formar vetores de ${}^8A_2 = 56$ modos distintos, há 56 casos possíveis.
de acordo com a Lei de Laplace, a probabilidade pedida é
$$\frac{{}^4A_2 \times 2}{56} = \frac{3}{7}.$$

2.1. Consideremos os acontecimentos:
R: "o aluno é rapaz";
F: "o aluno frequenta o 10.º ano".
De acordo com o enunciado temos:
$P(R|F) = \frac{3}{5}$;
$P(R) = \frac{11}{21}$;
$P(R \cap F) = \frac{1}{7}$.
Pretendemos calcular $P\left(\overline{R} \cap \overline{F}\right)$:
$$\begin{aligned} P\left(\overline{R} \cap \overline{F}\right) &= P\left(\overline{R \cup F}\right) \\ &= 1 - P\left(R \cup F\right) \\ &= 1 - \left(P(R) + P(F) - P\left(R \cap F\right)\right). \end{aligned}$$

Por outro lado,
$$\begin{aligned} & P(R|F) = \frac{3}{5} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{P\left(R \cap F\right)}{P(F)} = \frac{3}{5} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{\frac{1}{7}}{P(F)} = \frac{3}{5} \\ \Leftrightarrow\ & P(F) = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{3}{5}} \\ \Leftrightarrow\ & P(F) = \frac{5}{21}. \end{aligned}$$

Assim,
$$\begin{aligned} & 1 - \left(P(R) + P(F) - P\left(R \cap F\right)\right) \\ & 1 - \left(\frac{11}{21} + \frac{5}{21} - \frac{1}{7}\right) \\ = & \frac{8}{21} \approx 0.38. \end{aligned}$$

A probabilidade pedida é 0.38.

2.2. A turma tem 15 raparigas e $26 - 15 = 11$ rapazes.
Se a comissão inclui rapazes e raparigas e o delegado de turma pertence à comissão, temos as seguintes possibilidades:

- delegado e 2 raparigas: ${}^{15}C_2 = 105$ comissões;
- delegado, outro rapaz e 1 rapariga: ${}^{10}C_1 \times {}^{15}C_1 = 150$.

No total temos $105 + 150 = 255$ comissões nas condições apresentadas.
Podemos concluir que a opção correta é a **(D)**.

3.1. Havendo duas bolas brancas e três bolas pretas, temos $S_X = \{0, 1, 2\}$.

- $P(X = 0)$ corresponde à probabilidade de se tirarem duas bolas pretas: $\frac{{}^3C_2}{{}^5C_2} = \frac{3}{10}$;
- $P(X = 1)$ corresponde à probabilidade de se tirar uma bola branca e uma bola preta: $\frac{{}^2C_1 \times {}^3C_1}{{}^5C_2} = \frac{3}{5}$;

- $P(X=2)$ corresponde à probabilidade de se tirarem duas bolas brancas: $\frac{{}^2C_2}{{}^5C_2}=\frac{1}{10}$.

Assim,

$$\mu_X=\sum_{x\in S_X} x\times P(X=x)=0\times\frac{3}{10}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{1}{10}=0.8.$$

Podemos concluir que a opção correta é a **(B)**.

3.2. Sabemos que, num triângulo, ao maior lado opõe-se o ângulo de maior amplitude.
Assim, ao lado de comprimento 6 opõe-se o ângulo de amplitude α.
Pelo Teorema de Carnot,

$$\begin{aligned}
&6^2=4^2+5^2-2\times4\times5\cos\alpha\\
\Leftrightarrow\ &40\cos\alpha=5\\
\Leftrightarrow\ &\cos\alpha=\frac{1}{8}\\
\Leftrightarrow\ &\alpha\approx 82.819244^\circ.
\end{aligned}$$

Logo, $\operatorname{sen}\alpha\approx0.992$.
Podemos concluir que a opção correta é a **(B)**.
Um outro modo de resolver o exercício, a partir da etapa $\cos\alpha=\frac{1}{8}$ é aplicar a fórmula fundamental da trigonometria:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1\\
\Leftrightarrow\ &\operatorname{sen}^2\alpha+\frac{1}{64}=1\\
\Leftrightarrow\ &\operatorname{sen}^2\alpha=\frac{63}{64}\\
\Leftrightarrow\ &\operatorname{sen}\alpha=\pm\frac{\sqrt{63}}{8}.
\end{aligned}$$

Como $\alpha\in\,]0,180^\circ[$, por ser a amplitude do ângulo interno de um triângulo, então $\operatorname{sen}\alpha=\frac{\sqrt{63}}{8}\approx0.992$.

4. A afirmação "aumentando a intensidade do som em 150 $\mu W/m^2$, o seu nível passa a ser 1,4% do quadrado do nível inicial" traduz-se através da equação

$$N(I+150)=0.014\times[N(I)]^2.$$

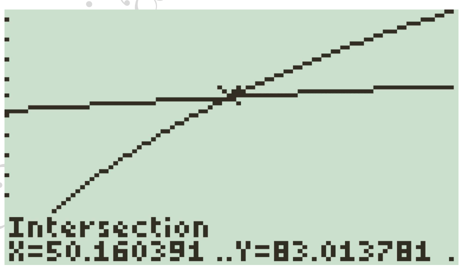
Introduzindo na calculadora gráfica as expressões

$$y=N(x+150)=60+10\log_{10}(x+150)$$

e

$$y=0.014\times[N(x)]^2=0.014\left(60+10\log_{10}x\right)^2$$

e recorrendo às suas potencialidades, obtemos os gráficos seguintes e o seu ponto de interseção no intervalo $[20,80]$.



Podemos concluir que $x\approx50$.
Assim, a intensidade inicial do som do despertador em causa é aproximadamente 50 $\mu W/m^2$.

5. Como f é contínua em $\mathbb{R}$, também é em particular contínua no ponto 1.
Assim tem que verificar $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$. Como

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to1}f(x)&=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}\\
&\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}\\
&=\lim_{x\to1}(x+1)=2
\end{aligned}$$

então f é contínua no ponto 0 se e só se

$$\log_3k=2\Leftrightarrow k=3^2\Leftrightarrow k=9.$$

Podemos concluir que a opção correta é a **(D)**.

6. Uma vez que:

- 2, a e b são três termos consecutivos de uma progressão geométrica, então $\frac{a}{2}=\frac{b}{a}$;
- $a-2$, b e 2 são três termos consecutivos de uma progressão aritmética então $b-(a-2)=2-b$.

Vamos determinar os valores de a e b através da resolução do sistema seguinte.

$$\begin{cases}\frac{a}{2}=\frac{b}{a}\\ b-(a-2)=2-b\end{cases}\overset{a\neq0}{\Leftrightarrow}\begin{cases}(2b)^2=2b\\ 2b=a\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}4b^2-2b=0\\ ---\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b(2b-1)=0\\ ---\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}b=0\vee b=\frac{1}{2}\\ ---\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=0\\ a=0\end{cases}\vee\begin{cases}b=\frac{1}{2}\\ a=1\end{cases}$$

Como, por hipótese, $a\neq0$ e $b\neq0$ então $a=1$ e $b=\frac{1}{2}$.

7. Sabemos que sendo A o afixo de z, como C se obtém a partir de A através de uma rotação centrada na origem de amplitude $\frac{\pi}{2}$, então C é o afixo de iz.
Como $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}$, o afixo de B é $z+iz=z(1+i)$.
Podemos concluir que a opção correta é a **(A)**.

8.

$$\begin{aligned}
w&=\frac{3z_1-i\overline{z_2}}{1+i^7}=\frac{3(2-3i)-i(1+2i)}{1-i}\\
&=\frac{6-9i-i+2}{1-i}=\frac{8-10i}{1-i}\\
&=\frac{(8-10i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{8+8i-10i+10}{1^2+1^2}\\
&=\frac{18-2i}{2}=9-i.
\end{aligned}$$

A equação da circunferência de centro no afixo de z_1 e raio $\sqrt{53}$ é $|z-(2-3i)|=\sqrt{53}$.
Substituindo w nesta equação vem:

$$|9-i-(2-3i)|=\sqrt{53}\Leftrightarrow|7+2i|=\sqrt{53}\Leftrightarrow\sqrt{7^2+2^2}=\sqrt{53}\Leftrightarrow\sqrt{53}=\sqrt{53}.$$

Podemos assim concluir que o afixo de w pertence à circunferência.

9.1. Vamos começar por determinar os vértices dos polígonos, resolvendo os sistemas seguintes.

$$\begin{cases} y = 300 \\ x + y = 400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 300 \\ x = 100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 150 \\ x + y = 400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 150 \\ y = 250 \end{cases}$$

Podemos concluir que $O(0,0)$, $A(150,0)$, $B(150,250)$, $C(100,300)$ e $D(0,300)$.
Um vez que o valor máximo da região ocorre num destes vértices, vamos avaliar a função objetivo, definida por $L = 2x + y$ em cada um destes pontos:

- $L(0,0) = 2 \times 0 + 0 = 0$;
- $L(150,0) = 2 \times 150 + 0 = 150$;
- $L(100,300) = 2 \times 100 + 300 = 500$;
- $L(150,250) = 2 \times 150 + 250 = 550$;
- $L(0,300) = 2 \times 0 + 300 = 300$.

Podemos concluir que o valor máximo alcançado na região é 550.
A opção correta é a **(C)**.

9.2. $\operatorname{sen}\left(3 \operatorname{arccos}\frac{1}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(3 \times \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\pi = 0$.
A opção correta é a **(C)**.

10. Podemos obter as coordenadas do ponto A, ponto de interseção da reta AB com Ox, resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = 2x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -2. \end{cases}$$

Podemos concluir que $A(-2,0)$.
Podemos obter as coordenadas do ponto B, ponto de interseção da reta AB com Oy, resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 4. \end{cases}$$

Podemos concluir que $B(0,4)$.
As coordenadas do ponto médio são

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) = \left(\frac{-2+0}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = (-1,2).$$

A opção correta é a **(B)**.

11.1 Como

$$\frac{x-1}{2} = \frac{3-y}{4} = z \Leftrightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-0}{1},$$

podemos concluir que $\vec{r} = (2,-4,1)$ é um vetor diretor da reta r.
Como

$$\vec{r} \cdot \vec{c} = (2,-4,1) \cdot (1,1,2) = 2 - 4 + 2 = 0$$

então $\vec{c} \perp \vec{r}$.
A opção correta é a **(C)**.

11.2

$$\lim \left(\frac{n + \ln a}{n}\right)^{n+2} = \lim \left(1 + \frac{\ln a}{n}\right)^n \times \lim \left(1 + \frac{\ln a}{n}\right)^2 = e^{\ln a} \times 1^2 = a.$$

A opção correta é a **(C)**.

12.1 As assíntotas paralelas aos eixos coordenados são as assíntotas verticais e as assíntotas horizontais.

Assíntotas verticais:
Comecemos por notar que $D_h = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
Como
$\lim_{x \to 1^-} h(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{e^x}{x-1} = \frac{e}{0^-} = -\infty$;
$\lim_{x \to 1^+} h(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{e^x}{x-1} = \frac{e}{0^+} = +\infty$
então $x = 1$ é uma equação da assíntota vertical do gráfico de h. É a única pois h é contínua em D_h, por ser a divisão de funções contínuas.

Assíntotas horizontais:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} h(x) &= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x-1} \\ &\overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{e^x}{x} \times \frac{x}{x-1}\right] \\ &= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} \times \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x-1} \\ &= +\infty \times 1 = +\infty. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -\infty} h(x) &= \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x-1} \\ &= \frac{e^{-\infty}}{-\infty - 1} = \frac{0}{-\infty} = 0. \end{aligned}$$

Podemos concluir que a reta de equação $y = 0$ é a única assíntota horizontal do gráfico de h.

12.2

$$\begin{aligned} & (x-1) \times h(x) + 2e^{-x} = 3 \\ \Leftrightarrow\ & (x-1) \times \frac{e^x}{x-1} + 2e^{-x} - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & e^x + 2e^{-x} - 3 = 0 \wedge x \neq 1 \\ \Leftrightarrow\ & (e^x)^2 - 3e^x + 2 = 0 \wedge x \neq 1 \\ \Leftrightarrow\ & e^x = 2 \vee e^x = 1 \Leftrightarrow x = \ln 2 \vee x = 0. \end{aligned}$$

O conjunto solução é $S = \{0, \ln 2\}$.

13.1 $D_g =]0,\pi[$.

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\frac{1}{4}\cos(2x) - \cos x\right)' \\ &= -\frac{1}{4} \times 2\sin(2x) + \sin x \\ &= -\frac{1}{2}\sin(2x) + \sin x. \end{aligned}$$

$g''(x) = -\frac{1}{2} \times 2 \times \cos(2x) + \cos x = -\cos(2x) + \cos x$.

$$\begin{aligned} g''(x) = 0 &\Leftrightarrow \cos(2x) = \cos x \\ &\Leftrightarrow 2x = x + 2k\pi \vee 2x = -x + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x = 2k\pi \vee x = \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$g''(x) = -\cos(2x) + \cos x$		$+$	0	$-$	
g		$\cup$	P.I.	$\cap$	

Como $\frac{\pi}{2} \in \left]0, \frac{2\pi}{3}\right[$ e $g''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 > 0$ então $g''(x) > 0,\ \forall x \in \left]0, \frac{2\pi}{3}\right[$.
Como $\frac{5\pi}{6} \in \left]\frac{2\pi}{3}, \pi\right[$ e $g''\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} < 0$ então $g''(x) < 0,\ \forall x \in \left]\frac{2\pi}{3}, \pi\right[$.

$$\begin{aligned} g\left(\frac{2\pi}{3}\right) &= \frac{1}{4}\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ &= -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

Podemos concluir que $\left(\frac{2\pi}{3}, g\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{3}{8}\right)$ são as coordenadas do ponto de inflexão do gráfico de g.
A concavidade do gráfico de g é voltada para cima em $\left]0, \frac{2\pi}{3}\right]$ e voltada para baixo em $\left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right[$.

13.2 Como
$g(-x) = \frac{1}{4}\cos(-2x) - \cos(-x) = \frac{1}{4}\cos(2x) - \cos x$
e

$$\begin{aligned} g\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \frac{1}{4}\cos\left(2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ &= \frac{1}{4}\cos(\pi - 2x) - \sin x \\ &= -\frac{1}{4}\cos(2x) - \sin x. \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} f(x) &= g(-x) + g\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ &= \frac{1}{4}\cos(2x) - \cos x - \frac{1}{4}\cos(2x) - \sin x \\ &= -\cos x - \sin x. \end{aligned}$$

Podemos concluir que a opção correta é a **(B)**.

14 Seja a a abcissa do ponto P.
Como $f'(x) = 2x$ então $f'(a) = 2a$ é o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa a. A sua equação reduzida é da forma $y = 2ax + b$, onde $b \in \mathbb{R}$. Substituindo as coordenadas do ponto de tangência $(a, f(a)) = \left(a, a^2\right)$ nesta equação temos

$$a^2 = 2a \times a + b \Leftrightarrow b = -a^2.$$

Podemos concluir que a equação reduzida da reta r é $y = 2ax - a^2$.
Uma vez que a reta s é perpendicular à reta r então o seu declive é $-\frac{1}{2a}$.
Vamos agora determinar uma equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f com declive $-\frac{1}{2a}$.
A sua equação reduzida é da forma $y = -\frac{1}{2a}x + b'$, $b' \in \mathbb{R}$.
Como

$$f'(x) = -\frac{1}{2a} \Leftrightarrow 2x = -\frac{1}{2a} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4a},$$

a sua abcissa é $-\frac{1}{4a}$.
$\left(-\frac{1}{4a}, f\left(-\frac{1}{4a}\right)\right) = \left(-\frac{1}{4a}, \frac{1}{16a^2}\right)$ são as coordenadas do respetivo ponto de tangência. Substituindo na equação da reta tangente temos

$$\frac{1}{16a^2} = -\frac{1}{2a} \times \left(-\frac{1}{4a}\right) + b' \Leftrightarrow b' = -\frac{1}{16a^2}.$$

Podemos concluir que a equação reduzida da reta s é $y = -\frac{1}{2a}x - \frac{1}{16a^2}$.
A solução do sistema seguinte vai-nos dar as coordenadas do ponto I, de interseção das retas r e s.

$$\begin{cases} y = 2ax - a^2 \\ y = -\frac{1}{2a}x - \frac{1}{16a^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} --- \\ 2ax - a^2 = -\frac{1}{2a}x - \frac{1}{16a^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} --- \\ -16a^4 + 1 = -8ax - 32a^3x \wedge a \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} --- \\ x = \frac{1-16a^4}{-8a(4a^2+1)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} --- \\ x = \frac{(1-4a^2)(1+4a^2)}{-8a(4a^2+1)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{2a} \times \frac{1-4a^2}{-8a} - \frac{1}{16a^2} \\ x = \frac{1-4a^2}{-8a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{4} \\ x = \frac{1-4a^2}{-8a} \end{cases}$$

Concluímos deste modo que a ordenada do ponto I é sempre $-\frac{1}{4}$.