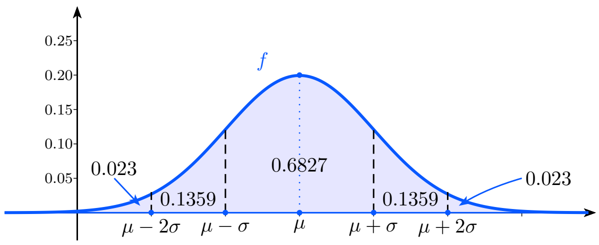
Proposta de resolução

1.1. Sabemos que se $X \sim N(\mu, \sigma)$ então:
$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0.6827$
$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$
$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$

Consideremos o gráfico seguinte, que ilustra parte destas propriedades.



Deste modo, $P(X > \mu - 2\sigma) = 1 - 0.023 = 0.977$.
A opção correta é a **(C)**.

1.2. $A\widehat{C}B = 180° - 57° - 81° = 42°$.
Pelo Teorema dos senos,

$$\begin{aligned} \frac{\sin 42°}{\overline{AB}} &= \frac{\sin 81°}{5} \\ \Leftrightarrow \overline{AB} &= \frac{5 \sin 42°}{\sin 81°} \\ \Rightarrow \overline{AB} &\approx 3.39. \end{aligned}$$

A opção correta é a **(C)**.

2. Consideremos, relativamente à experiência de escolha aleatória de um atleta do clube, os acontecimentos:
B: "pratica basquetebol";
F: "pratica futebol".
Dos dados do enunciado podemos concluir que
$P(B) = \frac{1}{5}$, $P(F) = \frac{2}{5}$ e $P\left(\overline{B}|\overline{F}\right) = \frac{3}{4}$.

$$\begin{aligned} & P\left(\overline{B}|\overline{F}\right) = \frac{3}{4} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{P\left(\overline{B} \cap \overline{F}\right)}{P\left(\overline{F}\right)} = \frac{3}{4} \\ \Leftrightarrow\ & P\left(\overline{B \cup F}\right) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{5} \\ \Leftrightarrow\ & 1 - P(B \cup F) = \frac{9}{20} \\ \Leftrightarrow\ & P(B \cup F) = \frac{11}{20} \\ \Leftrightarrow\ & P(B) + P(F) - P(B \cap F) = \frac{11}{20} \\ \Leftrightarrow\ & P(B \cap F) = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} - \frac{11}{20} \\ \Leftrightarrow\ & P(B \cap F) = \frac{1}{20}. \end{aligned}$$

Como $P(B \cap F) > 0$ então há pelo menos um atleta que pratica as duas modalidades desportivas.

3.1. Vamos recorrer ao esquema seguinte e ao Princípio fundamental da contagem para resolver o problema

V	A	A	A
5	9	8	7

Temos portanto $5 \times 9 \times 8 \times 7 = 2520$ códigos possíveis.
A opção correta é a **(D)**.

3.2. Uma vez que a escolha dos códigos é feita ao acaso, podemos recorrer à Lei de Laplace para calcular a probabilidade pedida.
Os casos possíveis são ${}^{14}A'_4 = 14^4$.
Relativamente aos casos favoráveis, notemos que para o produto dos três algarismos ser ímpar, o código tem obrigatoriamente que ter três algarismos ímpares. O esquema seguinte ilustra a situação.

I	I	I	I
5	4	3	2

Como a vogal pode ocupar qualquer uma das quatro posições temos $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 5_4^A = 120$ casos favoráveis.
Pela Lei de Laplace podemos concluir que a probabilidade pedida é $\frac{120}{14^4} \approx 0.003$.

4.1. O ponto P é da forma $P(1, 3, z)$ com $z \in \mathbb{R}$.
Substituindo na equação da superfície esférica temos

$$\begin{aligned} & (1-1)^2 + (3-2)^2 + (z+1)^2 = 10 \\ \Leftrightarrow\ & (z+1)^2 = 9 \Leftrightarrow z = 2 \vee z = -4. \end{aligned}$$

Logo $P(1, 3, -4)$.
Sendo $\vec{r} = (4, 1, -2)$ um vetor diretor da reta r, a equação do plano é da forma $4x + y - 2z + d = 0$.
Substituindo as coordenadas de P vem

$$4 \times 1 + 3 - 2 \times (-4) + d = 0 \Leftrightarrow d = -15.$$

Podemos concluir que $4x + y - 2z - 15 = 0$ é uma equação do plano em causa.

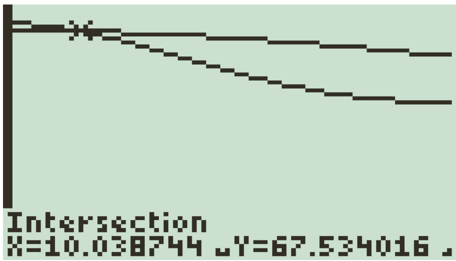
4.2. Temos $C(1, 2, -1)$ e $A(1, 2, 1)$. Por outro lado, $A\hat{O}C = \overrightarrow{OA}\hat{\ }\overrightarrow{OC}$ e temos

$$\begin{aligned} & \cos\left(\overrightarrow{OA}\hat{\ }\overrightarrow{OC}\right) = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}}{||\overrightarrow{OA}|| \times ||\overrightarrow{OC}||} \\ \Leftrightarrow\ & \cos\left(\overrightarrow{OA}\hat{\ }\overrightarrow{OC}\right) = \frac{(1,2,-1) \cdot (1,2,1)}{\sqrt{1+4+1} \times \sqrt{1+4+1}} \\ \Leftrightarrow\ & \cos\left(\overrightarrow{OA}\hat{\ }\overrightarrow{OC}\right) = \frac{1+4-1}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} \\ \Leftrightarrow\ & \cos\left(\overrightarrow{OA}\hat{\ }\overrightarrow{OC}\right) = \frac{2}{3} \\ \Leftarrow\ & \overrightarrow{OA}\hat{\ }\overrightarrow{OC} \approx 48°. \end{aligned}$$

5. O problema pode ser equacionado através da seguinte condição

$$\begin{aligned} & d(3\alpha) = 0.97 \times d(\alpha) \\ \Leftrightarrow\ & \frac{555}{10 - 2.06\cos(3\alpha)} = 0.97 \times \frac{555}{10 - 2.06\cos\alpha}. \end{aligned}$$

Recorrendo à calculadora gráfica obtemos os gráficos de $y = \frac{555}{10 - 2.06\cos(3x)}$ e $y = 0.97 \times \frac{555}{10 - 2.06\cos x}$ e uma aproximação do seu ponto de interseção $P(10.04; 67.53)$.

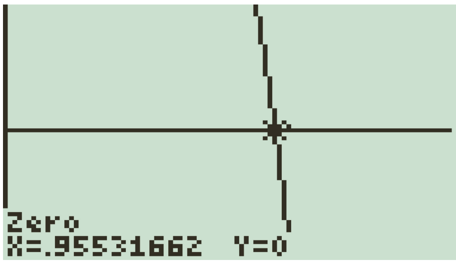


Logo, o valor do α pedido é aproximadamente $10°$.

6. Como $f''(x) = 3 - \frac{1}{\cos^2 x}$ então a abcissa do ponto de inflexão é solução da equação

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 3 - \frac{1}{\cos^2 x} = 0.$$

Recorrendo à calculadora gráfica obtemos o gráfico de $y = 3 - \frac{1}{\cos^2 x}$ e uma aproximação do seu zero em $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.



Logo, $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x \approx 0.96$ e podemos concluir que a opção correta é a **(D)**.

7. $u_3 = 4 \Leftrightarrow u_1 + 2r = 4 \Leftrightarrow u_1 = 4 - 2r$.

$$\begin{aligned} S_{12} = 174 &\Leftrightarrow \frac{u_1 + u_{12}}{2} \times 12 = 174 \\ &\Leftrightarrow u_1 + u_1 + 11r = 29 \\ &\Leftrightarrow 8 - 4r + 11r = 29 \\ &\Leftrightarrow r = 3. \end{aligned}$$

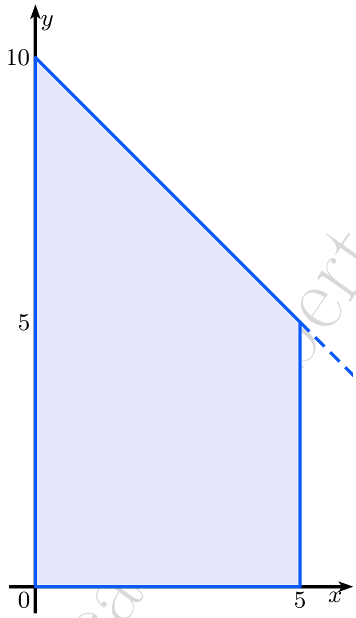
Logo, $u_n = u_3 + (n - 3) \times 3 = 3n - 5$.
$u_n = 5371 \Leftrightarrow 3n = 5376 \Leftrightarrow n = 1792$.
Como $1792 \in \mathbb{N}$, podemos concluir que 5371 é termo da sucessão (u_n).

8. Como o pentágono $[ABCDE]$ é regular então os seus vértices são os afixos das raízes índice 5 de um determinado complexo. Seja w esse complexo. Sabemos que qualquer uma das raízes índice 5 elevada a 5 é igual a w. Deste modo, com C é o afixo de $e^{i\pi}$ e

$$\left(e^{i\pi}\right)^5 = e^{5i\pi} = -1,$$

podemos concluir que $w = z^5 = -1$.
A opção correta é a **(A)**.

9.1. Comecemos por representar a região admissível num referencial cartesiano.



Vamos avaliar a função objetivo em cada um dos vértices do polígono:

- $L(5, 0) = 5 + 5 \times 0 = 5$;
- $L(5, 5) = 3 \times 5 + 5 \times 5 = 40$;
- $L(0, 10) = 3 \times 0 + 5 \times 10 = 50$.

Podemos concluir que o valor máximo é 50 e que a opção correta é a **(B)**.

9.2. Temos

$$\overline{F_1F_2} = 12 \Leftrightarrow 2c = 12 \Leftrightarrow c = 6.$$

Por outro lado, como a soma das distâncias aos focos de uma elipse é sempre igual ao comprimento do eixo maior $2a$ então

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 20 \Leftrightarrow 2a = 20 \Leftrightarrow a = 10.$$

Deste modo,

$$b^2 + c^2 = a^2 \Leftrightarrow b^2 = 100 - 36 \Leftrightarrow b^2 = 64$$

e podemos concluir que a equação da elipse centrada na origem é

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$$

.
A opção correta é a **(B)**.

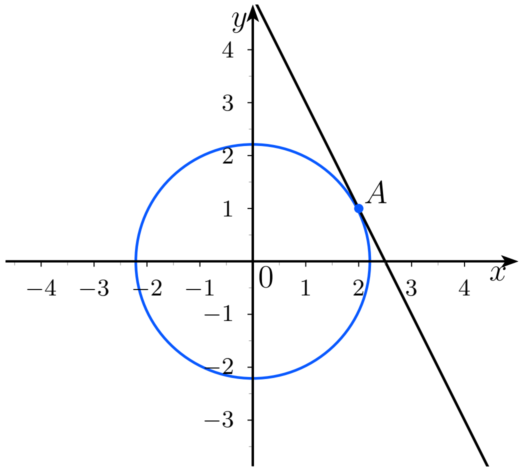
10.

$$\begin{aligned} z &= \frac{(2 - i)^2 + 1 + i}{1 - 2i} + 3i^{15} \\ &= \frac{4 - 4i - 1 + 1 + i}{1 - 2i} + 3i^3 \\ &= \frac{4 - 3i}{1 - 2i} - 3i \\ &= \frac{(4 - 3i)(1 + 2i)}{(1 - 2i)(1 + 2i)} - 3i \\ &= \frac{10 + 5i}{5} - 3i = 2 - 2i. \end{aligned}$$

Assim, $-\frac{1}{2}\bar{z} = -1 - i$.
Como $|-1-i| = \sqrt{2}$ e $\text{Arg}(-1-i) = -\frac{3\pi}{4}$ então

$$-\frac{1}{2}\bar{z} = \sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}.$$

11. Comecemos por representar num referencial ortonormado os elementos descritos.



$\overrightarrow{OA} = (2,1) \Rightarrow m_{OA} = \frac{1}{2}$.
Logo, como a reta tangente no ponto A é perpendicular à reta OA, o seu declive é igual a -2.
Consequentemente, a sua equação reduzida é da forma $y = -2x + b$, onde $b \in \mathbb{R}$. Substituindo nesta equação as coordenadas de A temos

$$1 = -4 + b \Leftrightarrow b = 5$$

e podemos concluir que a equação reduzida da reta r é $y = -2x + 5$.
Temos portanto que a ordenada na origem da reta r é 5.
A opção correta é a **(B)**.

12.1. A resolução do sistema seguinte conduz-nos a conclusões relativamente à interseção dos três planos.

$$\begin{cases} y = -x \\ y = z \\ 2x + 3y - z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = -x \\ 2x - 3x + x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = -x \\ -1 = 0 \end{cases}$$

Podemos concluir que a opção correta é a **(D)**.

12.2.

$$\lim \left(\frac{n+5}{n+1}\right)^{\frac{n}{2}} = \lim \left(\frac{n\left(1+\frac{5}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)^{\frac{n}{2}} = \left[\frac{\lim\left(1+\frac{5}{n}\right)^n}{\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{e^5}{e}\right]^{\frac{1}{2}} = e^2$$

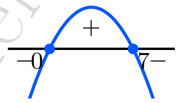
Podemos concluir que a opção correta é a **(D)**.

13. Comecemos por determinar o domínio da condição:

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x + 1 > 0 \wedge 8 - x > 0\} =]-1, 8[.$$

$$\begin{aligned} & \log_2(x+1) \leq 3 - \log_2(8-x) \\ \Leftrightarrow\ & \log_2(x+1) + \log_2(8-x) \leq \log_2 8 \\ \Leftrightarrow\ & \log_2\left((x+1)(8-x)\right) \leq \log_2 8 \\ \Leftrightarrow\ & -x^2 + 7x \leq 0 \wedge x \in D \end{aligned}$$

Para resolver uma inequação do 2.° grau $-x^2 + 7x \leq 0$ devemos:
(i) determinar os zeros da equação $ax^2 + bx + c = 0$ associada à inequação;
(ii) esboçar o gráfico da função definida por $y = ax^2 + bx + c$;
(iii) escrever o conjunto solução.
C.A. $-x^2 + 7x = 0 \Leftrightarrow x = 7 \vee x = 0$.
Esboço do gráfico da função definida por $y = -x^2 + 7x$:



Logo,

$$-x^2 + 7x \leq 0 \wedge x \in D \Leftrightarrow x \in]-1, 0] \cup [7, 8[.$$

Podemos concluir que o conjunto solução é $S =]-1, 0] \cup [7, 8[$.

14.1.

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{3 + \frac{e^h}{1-h} - 4}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1 + h}{h(1-h)} \\ &\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} \times \lim_{h \to 0} \frac{1}{1-h} + \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(1-h)} \\ &= 1 \times 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

14.2. Comecemos por determinar as assíntotas do gráfico de f quando $x \to -\infty$.
$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(3 + \frac{e^x}{1-x}\right) = 3 + \frac{0}{1-(-\infty)} = 3$.
Podemos concluir que a reta de equação $y = 3$ é assíntota horizontal do gráfico de f.
Determinemos agora as assíntotas do gráfico de f quando $x \to +\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln\left(x^2\right) + 2}{x}\right) \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{2\ln x}{x} + \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x}$$
$$= 0 + 0 = 0$$

Podemos concluir que a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal do gráfico de f.

14.3. $\left(f \circ h^{-1}\right)(2) = f\left(h^{-1}(2)\right)$.
Como $h(x) = 2 \Leftrightarrow x + 1 = 2 \Leftrightarrow x = 1$ então $h^{-1}(2) = 1$ e
$f\left(h^{-1}(2)\right) = f(1) = \frac{\ln 1 + 2}{1} = 2$.
Podemos concluir que a opção correta é a **(C)**.

15. Sabemos que o declive da reta tangente ao gráfico de uma função num ponto é igual ao valor da sua derivada nesse ponto. Para encontrar o declive da reta r vamos determinar o máximo absoluto de g' estudando a monotonia de g'.
$g'(x) = 2\cos x + 2\sin x \cos x = 2\cos x + \sin(2x)$.
$g''(x) = -2\sin x + 2\cos(2x)$.

$$\begin{aligned} & g''(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = \cos(2x) \\ \Leftrightarrow\ & \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(2x) \\ \Leftrightarrow\ & \frac{\pi}{2} - x = 2x + 2k\pi \vee \frac{\pi}{2} - x = -2x + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow\ & x = \frac{\pi}{6} - \frac{2}{3}k\pi \vee x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Para encontrar as soluções desta equação no conjunto $[0, \pi]$ vamos atribuir valores inteiros a k.
Comecemos com $x = \frac{\pi}{6} - \frac{2}{3}k\pi$.

- $k = -2 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{4}{3}\pi = \dfrac{3}{2}\pi \notin [0, \pi]$;
- $k = -1 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2}{3}\pi = \dfrac{5}{6}\pi \in [0, \pi]$;
- $k = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6} \in [0, \pi]$;
- $k = 1 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{3\pi}{6} \notin [0, \pi]$.

Relativamente a $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ temos:

- $k = -1 \Rightarrow x = -\dfrac{5}{2}\pi \notin [0, \pi]$;
- $k = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} \notin [0, \pi]$;
- $k = 1 \Rightarrow x = \dfrac{3}{2}\pi \notin [0, \pi]$.

Podemos concluir que

$$g''(x) = 0 \wedge x \in [0, \pi] \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right\}.$$

Estudemos agora a monotonia e os extremos de g' numa tabela.

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$g''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
g'		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

$g'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$;
$g'(\pi) = 2\cos\pi + \sin(2\pi) = -2$.
Podemos assim concluir que o máximo absoluto de g' no intervalo $[0, \pi]$ é $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, sendo este o declive da reta r.