Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2018

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Caderno 1

Duração da Prova (Caderno 1 + Caderno 2): 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 7 Páginas

---

Caderno 1: 75 minutos. Tolerância: 15 minutos.
É permitido o uso de calculadora.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro e transferidor.

Só é permitido o uso de calculadora no Caderno 1.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens de cada caderno encontram-se no final do respetivo caderno.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis}\theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis}\theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$

($k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1(x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n(x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O **item 1.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (**P2001/2002**).

O **item 1.2.** integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, homologado em 2015 (**PMC2015**).

Responda apenas a um dos dois itens.

Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

P2001/2002

1.1. Na Figura 1, está representado um dado tetraédrico equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 4

Lança-se dez vezes esse dado e, em cada lançamento, regista-se o número da face que fica voltada para baixo.

Qual é a probabilidade, arredondada às milésimas, de sair exatamente seis vezes a face com o número 3 ?

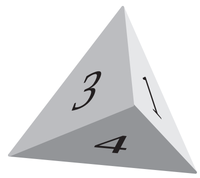

Figura 1

(A) $0{,}146$ **(B)** $0{,}016$ **(C)** $0{,}008$ **(D)** $0{,}007$

PMC2015

1.2. Seja f uma função diferenciável no intervalo $[0,2]$ tal que:

- $f(0)=1$
- $\forall x \in [0,2],\ 0 < f'(x) < 9$

O teorema de Lagrange, aplicado à função f em $[0,2]$, permite concluir que:

(A) $0 < f(2) < 18$

(B) $1 < f(2) < 19$

(C) $2 < f(2) < 20$

(D) $3 < f(2) < 21$

2. Na Figura 2, está representado, num referencial o.n. $Oxyz,$ um prisma hexagonal regular.

Sabe-se que:

- $[PQ]$ e $[QR]$ são arestas de uma das bases do prisma;
- $\overline{PQ} = 4$

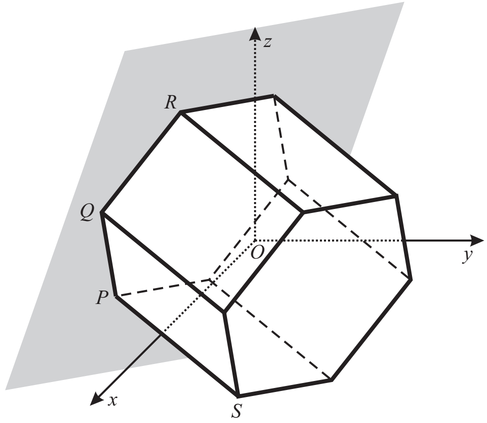

Figura 2

2.1. Determine o produto escalar $\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR}$

2.2. Sabe-se ainda que:

- o plano PQR tem equação $2x + 3y - z - 15 = 0$
- uma das arestas laterais do prisma é o segmento de reta $[PS]$, em que S é o ponto de coordenadas $(14,5,0)$

Determine a área lateral do prisma.

Apresente o resultado arredondado às décimas.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

2.3. Escolhem-se, ao acaso, dois vértices de cada uma das bases do prisma.

Determine a probabilidade de esses quatro pontos pertencerem a uma mesma face lateral do prisma.

Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às centésimas.

3. Uma escola dedica-se ao ensino de Espanhol e de Inglês, entre outras línguas.

3.1. Doze alunos dessa escola, quatro de Espanhol e oito de Inglês, dispõem-se lado a lado em linha reta para tirar uma fotografia.

De quantas maneiras se podem dispor os doze alunos, de modo que os alunos da mesma disciplina fiquem juntos?

(A) 40 320 **(B)** 80 640 **(C)** 967 680 **(D)** 1 935 360

3.2. Relativamente a essa escola, sabe-se que:

- o número de alunos que estudam Espanhol é igual ao número de alunos que estudam Inglês;
- o número de alunos que estudam, pelo menos, uma das duas línguas é o quádruplo do número de alunos que estudam as duas línguas.

Escolhe-se, ao acaso, um aluno dessa escola.

Determine a probabilidade de esse aluno estudar Inglês, sabendo que estuda Espanhol.

Apresente o resultado na forma de percentagem.

4. Um feixe de luz incide perpendicularmente sobre um conjunto de três placas sobrepostas, homogéneas e iguais, feitas de um material transparente. A Figura 3 ilustra a situação.

Admita que a potência, L, da luz transmitida, após atravessar o conjunto de placas, é dada por

$$L = I(1-R)^6 e^{-3\lambda}$$

em que:

- I é a potência da luz incidente;
- R é o coeficiente de reflexão do material $(0 < R < 1)$
- λ é o coeficiente de absorção do material, por centímetro $(\lambda > 0)$

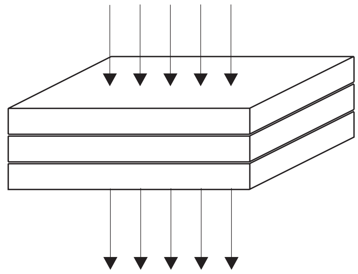

Figura 3

Relativamente ao material de que as placas são feitas, sabe-se que o coeficiente de reflexão, R, e o coeficiente de absorção, λ, têm o mesmo valor numérico.

Sabe-se ainda que a potência da luz transmitida é igual a metade da potência da luz incidente.

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, o valor comum dos coeficientes de absorção e de reflexão do material, sabendo-se que esse valor existe e é único.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

– equacione o problema;

– reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;

– apresente o valor pedido arredondado às milésimas.

5. Para um certo número real x, pertencente ao intervalo $\left]0, \frac{\pi}{12}\right[$, o número complexo $z = (\cos x + i \operatorname{sen} x)^{10}$ verifica a condição $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{3}\operatorname{Re}(z)$

Qual é o valor de x arredondado às centésimas?

(A) $0{,}02$ **(B)** $0{,}03$ **(C)** $0{,}12$ **(D)** $0{,}13$

6. Seja a um número real.

Sabe-se que a, $a+6$ e $a+18$ são três termos consecutivos de uma progressão geométrica.

Relativamente a essa progressão geométrica, sabe-se ainda que a soma dos sete primeiros termos é igual a 381

Determine o primeiro termo dessa progressão.

7. Na Figura 4, está representada, num referencial o.n. xOy, uma circunferência de centro na origem e que passa nos pontos A, B, C, D, E e F

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao semieixo positivo Ox e tem abcissa igual a 2
- os pontos B e F têm ambos abcissa igual a 1
- os pontos C, D e E são, respetivamente, os simétricos dos pontos B, A e F relativamente ao eixo Oy

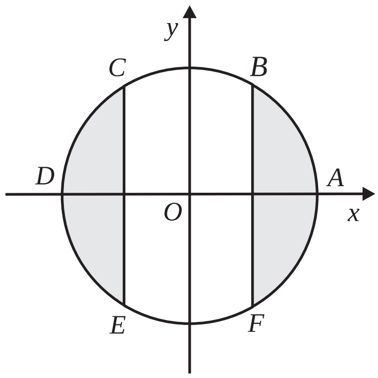

Figura 4

Qual das condições seguintes define o domínio plano representado a sombreado?

(A) $x^2 + y^2 \leq 2 \ \wedge \ |x| \geq 1$

(B) $x^2 + y^2 \leq 4 \ \wedge \ |x| \leq 1$

(C) $x^2 + y^2 \leq 4 \ \wedge \ |x| \geq 1$

(D) $x^2 + y^2 \leq 2 \ \wedge \ |x| \leq 1$

FIM DO CADERNO 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

Item											
Cotação (em pontos)											
1.1.	**1.2.**	**2.1.**	**2.2.**	**2.3.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	
8		12	12	12	8	13	12	8	12	8	**105**

Prova 635

1.ª Fase

CADERNO 1