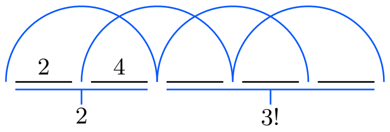
Proposta de resolução

GRUPO I

1. O esquema seguinte ilustra a situação.



Como o 2 e o 4 se podem colocar em qualquer uma das 4 posições ilustradas na figura, então há $2! \times 3! \times 4 = 48$ números com os algarismos pares um a seguir ao outro. A opção correta é a **(B)**.

2.

$$\begin{aligned} P(X>1|X\le 3) &= \frac{P(X>1 \wedge X<3)}{P(X\le 3)} \\ &= \frac{P(X=2)+P(X=3)}{P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)} \\ &= \frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}} \\ &= \frac{5}{9}. \end{aligned}$$

Podemos concluir que a opção correta é a **(D)**.

3.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{f(x)-f(2)} = 4 \Leftrightarrow \lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)}{f(x)-f(2)} = 4$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 2} x \times \frac{1}{\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}} = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{f'(2)} = 4 \Leftrightarrow f'(2) = \frac{1}{2}.$$

A opção correta é a **(C)**.

4. Observamos no gráfico de g que 2 é o único zero de g. Consequentemente, $g(2)=0$ e

$$g(f(x)) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 2 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 5.$$

A opção correta é a **(B)**.

5. O gráfico de $g(x) = -f(x-5)$ resulta de deslocar o gráfico de f cinco unidades para a direita e fazendo o seu simétrico relativamente ao eixo Ox. Deste modo, obtemos a seguinte tabela de variação de sinal de f'' e das concavidades do gráfico de g.

x	$-\infty$	-5		5		15	$+\infty$
g''	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
g	$\cup$	0	$\cap$	0	$\cup$	0	$\cap$

Podemos concluir que a opção correta é a **(C)**.

6. Seja $z = \rho \operatorname{cis}\frac{\pi}{5}$, $\rho \in \mathbb{R}^+$.

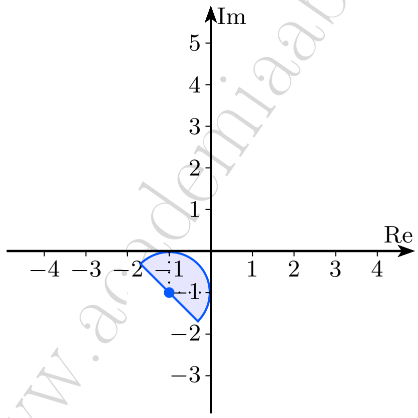
$$-5iz = 5\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right) \times \rho\operatorname{cis}\frac{\pi}{5} = 5\rho\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{5}\right)$$

$$5\rho\operatorname{cis}\left(\frac{-5\pi+2\pi}{10}\right) = 5\rho\operatorname{cis}\left(-\frac{3\pi}{10}\right)$$

Podemos concluir que a opção correta é a **(A)**.

7. $(x+1)^2+(y+1)^2 \le 1 \wedge x+y+2 \ge 0 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y+1)^2 \le 1 \wedge y \ge -x-2$.

Temos portanto a interseção de um circulo de centro $(-1,-1)$ e raio 1 intersetado com o semi-plano superior, limitado inferiormente por $y=-x-2$.



O perímetro da região é igual a metade do perímetro do círculo mais o seu diâmetro: $\frac{2\pi\times 1}{2}+2 = \pi+2$.

A opção correta é a **(C)**.

8. Como

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{1-(n+1)}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{1-n}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$$

então (u_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$

A opção correta é a **(B)**.

GRUPO II

1. Comecemos por determinar z_2. Como $z_2 = 2+i$ então

$$z_1 \times \overline{z_2} = 4-3i \Leftrightarrow (2+i)\times\overline{z_2} = 4-3i \Leftrightarrow \overline{z_2} = \frac{4-3i}{2+i}$$

$$\Leftrightarrow \overline{z_2} = \frac{(4-3i)(2-i)}{4+1} \Leftrightarrow \overline{z_2} = \frac{8-4i-6i+3i^2}{5} \Leftrightarrow \overline{z_2} = \frac{5-10i}{5}$$

$$\Leftrightarrow \overline{z_2} = 1-2i \Leftrightarrow z_2 = 1+2i.$$

Por outro lado,

$$\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1+i.$$

Substituindo $1+i$ na condição $|z-z_1| = |z-z_2|$ vem

$|1+i-(2+i)| = |1+i-(1+2i)| \Leftrightarrow |-1| = |-i| \Leftrightarrow 1 = 1.$

Geometricamento, significa que o afixo de $\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$ pertence à mediatriz do segmento de reta de extremos nos afixos de z_1 e z_2.

2.1. O ponto C é o ponto de interseção de Oy com o plano ACG. Deste modo,
$$\begin{cases} x = 0 \wedge z = 0 \\ x + y - z - 6 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} ---- \\ y = 6 \end{cases}$$
Logo $C(0, 6, 0)$ e podemos concluir que o lado do cubo mede $\overline{DC} = 2$ unidades de comprimento. Deste modo, $A(2, 4, 0)$ e conclui-se que a abcissa de A é 2.

2.2. O ponto pretendido é a solução do sistema seguinte.

$$\begin{cases} x - 1 = 1 - y = z \\ x + y - z - 6 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 1 - y \\ x - 1 = z ------ \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ z = x - 1 \\ x + 2 - x - (x - 1) - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ z = -4 \\ x = -3 \end{cases}$$

Podemos concluir que o ponto de interseção é $(-3, 5, -4)$.

2.3 A figura seguinte ilustra a situação.

Como a área da base da pirâmide é $2 \times 2 = 4$, o seu volume ser 4 implica que, sendo h a sua altura $\frac{4 \times h}{3} = 4 \Leftrightarrow h = 3$. Logo $P(1, 5, 5)$. Assim, $\cos\left(O\hat{G}P\right) = \frac{\overrightarrow{GO} \cdot \overrightarrow{GP}}{\|\overrightarrow{GO}\| \times \|\overrightarrow{GP}\|}$.
$\overrightarrow{GO} = O - G = (0, 0, 0) - (2, 6, 2) = (-2, -6, -2)$.
$\overrightarrow{GP} = P - G = (1, 5, 5) - (2, 6, 2) = (-1, -1, 3)$.
Logo,

$$\cos\left(O\hat{G}P\right) = \frac{(-2, -6, -2) \cdot (-1, -1, 3)}{\sqrt{4 + 36 + 4} \times \sqrt{1 + 1 + 9}}$$
$$\Leftrightarrow \cos\left(O\hat{G}P\right) = \frac{2 + 6 - 6}{\sqrt{44} \times \sqrt{11}}$$
$$\Leftrightarrow O\hat{G}P \approx 85^\circ.$$

3.1 De acordo com os dados do problema, $P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = 0.82$ e $P(B|A) = \frac{1}{3}$. Deste modo,

$$P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = 0.82 \Leftrightarrow P\left(\overline{A \cap B}\right) = 0.82$$
$$1 - P(A \cap B) = 0.82 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0.18.$$

$$P(B|A) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{0.18}{P(A)} = \frac{1}{3}$$
$$P(A) = 3 \times 0.18 \Leftrightarrow P(A) = 0.54.$$

Temos portanto que $P(A) = 0.54$.

3.2 Como os cartões são extraídos ao acaso e cada cartão tem igual probabilidade de sair podemos utilizar a Lei de Laplace para determinar a probabilidade pedida. Para os menores números saídos serem o 7 e o 22 então os restantes dois números são superiores a 22. Assim, o número de casos favoráveis é ${}^{30-22}C_2 = {}^{8}C_2 = 28$. O número de casos possíveis é ${}^{30}C_4 = 27405$.
A probabilidade pedida é portanto $\frac{28}{27405} \approx 0.001$.

4.1 Assíntotas verticais:
$\lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 0^+}{0^+} = -\infty \times \frac{1}{0^+} = -\infty \times (+\infty)$
Logo, a reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical do gráfico de f. É a única pois f é contínua em $\mathbb{R}^+$ por ser o quociente de funções contínuas.
Assíntotas horizontais:
$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{(1)}{=} 0$
(1) Limite notável: $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0$, para $p \in \mathbb{R}^+$. Logo, a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal do gráfico de f.

4.2 Comecemos por notar que o domínio da condição $f(x) > 2 \ln x$ é $D = D_f \cap \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+$.
Assim temos:

$$f(x) > 2 \ln x \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} > 2 \ln x$$
$$\Leftrightarrow \frac{\ln x - 2x \ln x}{x} > 0$$
$$\Leftrightarrow \overset{x \geq 0}{\Leftrightarrow} \ln x(1 - 2x) > 0$$
$$\Leftrightarrow ((\ln x > 0 \wedge 1 - 2x > 0) \vee (\ln x < 0 \wedge 1 - 2x < 0)) \wedge x \in D$$
$$\Leftrightarrow ((x > 1 \wedge x < \frac{1}{2}) \vee (x < 1 \wedge x > \frac{1}{2})) \wedge x \in D$$
$$\Leftrightarrow x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[.$$

O conjunto solução da condição é portanto $S = \left]\frac{1}{2}, 1\right[$.

4.3 Como g é uma função derivável em $\mathbb{R}^+$, por ser a soma de funções deriváveis, então $g(1)$ ser extremo relativo implica que $g'(1) = 0$. Como

$$g'(x) = \frac{-k}{x^2} + \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2} = \frac{-k + 1 - \ln x}{x^2}$$

então

$$g'(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{-k + 1 - \ln 1}{1^2} = 0 \Leftrightarrow -k + 1 = 0 \Leftrightarrow k = 1.$$

5. Como

$$\left(2x \sin \alpha + \frac{\cos \alpha}{x}\right)^2 = 4x^2 \sin^2 x + 4 \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\cos^2 \alpha}{x^2}$$

então o termo independente de x é $4 \sin \alpha \cos \alpha$.
Como $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin(2\alpha)$ então

$$4 \sin \alpha \cos \alpha = 1 \Leftrightarrow 2 \times 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1$$
$$\Leftrightarrow \sin(2\alpha) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(2\alpha) = \sin \frac{\pi}{6}$$
$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{12} + k\pi \vee \alpha = \frac{5\pi}{12} + k\pi, \; k \in \mathbb{Z}.$$

Vamos agora atribuir valores inteiros a k em $\alpha = \frac{\pi}{12} + k\pi$ de modo a encontrar as soluções pertencentes ao intervalo $]\pi, 2\pi[$:

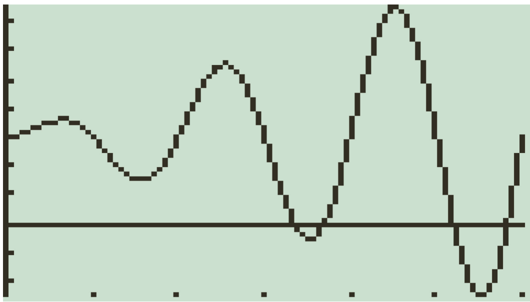
- para $k = 0$ temos $\alpha = \frac{\pi}{12} \notin]\pi, 2\pi[$;
- para $k = 1$ temos $\alpha = \frac{\pi}{12} + \pi = \frac{13}{12}\pi \in]\pi, 2\pi[$;
- para $k = 2$ temos $\alpha = \frac{\pi}{12} + 2\pi = \frac{15\pi}{12} \notin]\pi, 2\pi[$.

No caso de $\alpha = \frac{5\pi}{12} + k\pi$ temos:

- para $k = 0$ temos $\alpha = \frac{5\pi}{12} \notin]\pi, 2\pi[$;
- para $k = 1$ temos $\alpha = \frac{5\pi}{12} + \pi = \frac{17}{12}\pi \in]\pi, 2\pi[$;
- para $k = 2$ temos $\alpha = \frac{5\pi}{12} + 2\pi = \frac{29\pi}{12} \notin]\pi, 2\pi[$.

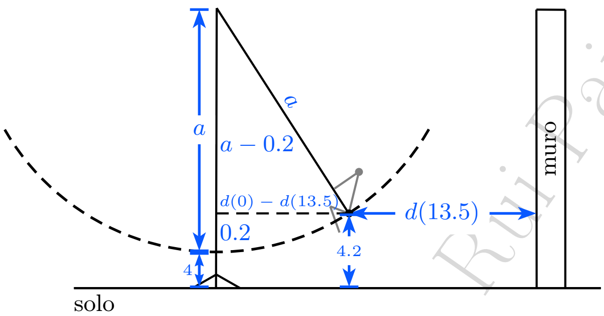
Podemos concluir que os valores de α para os quais o termo independente de x é igual a 1 são $\frac{13\pi}{12}$ e $\frac{17\pi}{12}$.

6.1. Introduzindo na calculadora gráfica as funções definidas por $y = d(t)$ e $y = 27$ obtemos os seguintes gráficos.



Podemos observar que os dois gráficos se intersetam quatro vezes no intervalo $[0, 6]$. No contexto da situação descrita, isso significa que, nos primeiros seis segundos, a criança que está a andar de baloiço fica quatro vezes a uma distância de 27 metros do muro.

6.2. Seja a o comprimento das aste. Consideremos a figura seguinte, ilustrativa da situação descrita.



Uma vez que na figura está implícito um triângulo retângulo de dimensões $a - 0.2$, $d(0) - d(13.5)$ e a, pelo Teorema de Pitágoras temos

$$(d(0) - d(13.5))^2 + (a - 0.2)^2 = a^2.$$

Como $d(0) = 30$ e

$$d(13.5) = 30 + 12e^{12-13.5}\sin(\pi \times 13.5) \approx 27.32$$

então

$$\begin{aligned} &(d(0) - d(13.5))^2 + (a - 0.2)^2 = a^2 \\ \Leftrightarrow\ &2.68^2 + a^2 - 0.4a + 0.04 = a^2 \\ \Leftrightarrow\ &a = \frac{-0.04 - 2.68^2}{-0.4} \Leftrightarrow a \approx 18. \end{aligned}$$

Podemos concluir que o comprimento da aste é aproximadamente 18 dm.