

EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

---

## **Prova Escrita de Matemática A**

---

12.º Ano de Escolaridade

---

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

---

**Prova 635/2.ª Fase**

14 Páginas

---

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

---

**2016**

**VERSÃO 1**

Nos termos da lei em vigor, as provas de avaliação externa são obras protegidas pelo Código do Direito de Autor e dos Direitos Conexos. A sua divulgação não suprime os direitos previstos na lei. Assim, é proibida a utilização destas provas, além do determinado na lei ou do permitido pelo IAVE, I.P., sendo expressamente vedada a sua exploração comercial.

---

**Página em branco**

---

---

Indique de forma legível a versão da prova.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

---

---

**Página em branco**

---

# Formulário

## Geometria

### Comprimento de um arco de circunferência:

$\alpha r$  ( $\alpha$  – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;  $r$  – raio)

**Área de um polígono regular:** *Semiperímetro*  $\times$  *Apótema*

### Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$  ( $\alpha$  – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;  $r$  – raio)

**Área lateral de um cone:**  $\pi r g$  ( $r$  – raio da base;  $g$  – geratriz)

**Área de uma superfície esférica:**  $4\pi r^2$  ( $r$  – raio)

**Volume de uma pirâmide:**  $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

**Volume de um cone:**  $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

**Volume de uma esfera:**  $\frac{4}{3}\pi r^3$  ( $r$  – raio)

## Progressões

Soma dos  $n$  primeiros termos de uma progressão  $(u_n)$ :

**Progressão aritmética:**  $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

**Progressão geométrica:**  $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

## Trigonometria

$\text{sen}(a + b) = \text{sen} a \cos b + \text{sen} b \cos a$

$\text{cos}(a + b) = \text{cos} a \cos b - \text{sen} a \text{sen} b$

$\text{tg}(a + b) = \frac{\text{tga} + \text{tgb}}{1 - \text{tga} \text{tgb}}$

## Complexos

$(\rho \text{ cis } \theta)^n = \rho^n \text{ cis } (n\theta)$

${}^n\sqrt{\rho \text{ cis } \theta} = {}^n\sqrt{\rho} \text{ cis} \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)$  ( $k \in \{0, \dots, n-1\}$  e  $n \in \mathbb{N}$ )

## Probabilidades

$$\mu = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$$
$$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \dots + p_n (x_n - \mu)^2}$$

Se  $X$  é  $N(\mu, \sigma)$ , então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$$

## Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n u^{n-1} u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\text{sen } u)' = u' \cos u$$

$$(\text{cos } u)' = -u' \text{sen } u$$

$$(\text{tg } u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' e^u$$

$$(a^u)' = u' a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

## Limites notáveis

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

---

**Página em branco**

---

## GRUPO I

---

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

---

1. Seja  $\Omega$ , conjunto finito, o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam  $A$  e  $B$  dois acontecimentos ( $A \subset \Omega$  e  $B \subset \Omega$ ).

Sabe-se que:

- $P(A) = 0,2$
- $P(B) = 0,3$
- $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,6$

Qual é o valor de  $P(A|B)$  ?

- (A)  $\frac{1}{3}$                       (B)  $\frac{1}{2}$                       (C)  $\frac{2}{3}$                       (D)  $\frac{5}{6}$

2. O Carlos joga basquetebol na equipa da sua escola.

Admita que, em cada lance livre, a probabilidade de o Carlos encestar é 0,4

Num treino, o Carlos vai executar uma série de cinco lances livres.

Qual é a probabilidade de o Carlos encestar exatamente quatro vezes?

- (A) 0,01536                      (B) 0,05184                      (C) 0,0768                      (D) 0,2592

3. Para certos valores de  $a$  e de  $b$  ( $a > 1$  e  $b > 1$ ), tem-se  $\log_a(ab^3) = 5$

Qual é, para esses valores de  $a$  e de  $b$ , o valor de  $\log_b a$  ?

- (A)  $\frac{5}{3}$                       (B)  $\frac{3}{4}$                       (C)  $\frac{3}{5}$                       (D)  $\frac{1}{3}$

4. Considere a função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}^+$ , definida por  $f(x) = \ln x$

Considere a sucessão de termo geral  $u_n = \frac{n}{e^n}$

Qual é o valor de  $\lim f(u_n)$  ?

- (A)  $-\infty$                       (B) 0                      (C)  $e$                       (D)  $+\infty$

5. Na Figura 1, está representada uma circunferência de centro no ponto  $O$  e raio 1

Sabe-se que:

- os diâmetros  $[AC]$  e  $[BD]$  são perpendiculares;
- o ponto  $P$  pertence ao arco  $AB$
- $[PQ]$  é um diâmetro da circunferência;
- o ponto  $R$  pertence a  $[OD]$  e é tal que  $[QR]$  é paralelo a  $[AC]$

Seja  $\alpha$  a amplitude, em radianos, do ângulo  $AOP$

$$\left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[ \right)$$

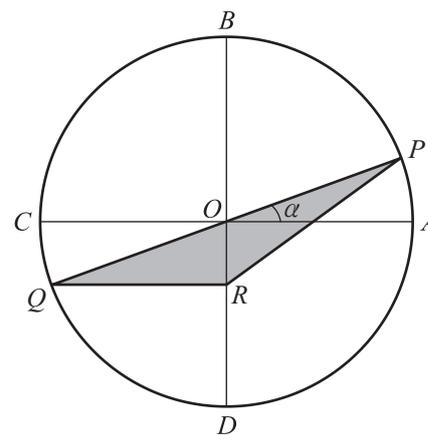


Figura 1

Qual das seguintes expressões dá a área do triângulo  $[PQR]$ , representado a sombreado, em função de  $\alpha$  ?

- (A)  $\frac{\cos(2\alpha)}{4}$                       (B)  $\frac{\sin(2\alpha)}{4}$                       (C)  $\frac{\cos(2\alpha)}{2}$                       (D)  $\frac{\sin(2\alpha)}{2}$

6. Em  $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos, seja  $z = 3 + 4i$

Sabe-se que  $z$  é uma das raízes de índice 6 de um certo número complexo  $w$

Considere, no plano complexo, o polígono cujos vértices são as imagens geométricas das raízes de índice 6 desse número complexo  $w$

Qual é o perímetro do polígono?

- (A) 42                      (B) 36                      (C) 30                      (D) 24

7. Considere, num referencial o.n.  $xOy$ , o quadrado definido pela condição

$$0 \leq x \leq 4 \quad \wedge \quad 1 \leq y \leq 5$$

Qual das condições seguintes define a circunferência inscrita neste quadrado?

(A)  $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 16$

(B)  $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 4$

(C)  $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$

(D)  $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$

8. De uma progressão geométrica  $(u_n)$ , monótona crescente, sabe-se que  $u_4 = 32$  e que  $u_8 = 8192$

Qual é o quinto termo da sucessão  $(u_n)$  ?

(A) 64

(B) 128

(C) 256

(D) 512

---

**Página em branco**

---

## GRUPO II

Na resposta aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Considere nove fichas, indistinguíveis ao tato, numeradas de 1 a 9

1.1. Considere duas caixas,  $U$  e  $V$

Colocam-se as fichas numeradas de 1 a 5 na caixa  $U$  e as fichas numeradas de 6 a 9 na caixa  $V$

Realiza-se a seguinte experiência.

Retira-se, ao acaso, uma ficha da caixa  $U$  e retira-se, também ao acaso, uma ficha da caixa  $V$

Sejam  $A$  e  $B$  os acontecimentos:

$A$  : «A soma dos números das fichas retiradas é igual a 10»

$B$  : «O produto dos números das fichas retiradas é ímpar»

Determine o valor de  $P(B|A)$ , sem aplicar a fórmula da probabilidade condicionada.

Na sua resposta:

- explique o significado de  $P(B|A)$  no contexto da situação descrita;
- indique os casos possíveis, apresentando cada um deles na forma  $(u, v)$ , em que  $u$  designa o número da ficha retirada da caixa  $U$  e  $v$  designa o número da ficha retirada da caixa  $V$
- indique os casos favoráveis;
- apresente o valor pedido na forma de fração irredutível.

1.2. Na Figura 2, está representado um tabuleiro com 16 casas, dispostas em quatro filas horizontais ( $A, B, C$  e  $D$ ) e em quatro filas verticais (1, 2, 3 e 4)

Pretende-se dispor as nove fichas (numeradas de 1 a 9) no tabuleiro, de modo que cada ficha ocupe uma única casa e que cada casa não seja ocupada por mais do que uma ficha.

De quantas maneiras diferentes é possível dispor as nove fichas, de tal forma que as que têm número par ocupem uma única fila horizontal?

	1	2	3	4
A				
B				
C				
D				

Figura 2

2. Seja  $\rho$  um número real positivo, e seja  $\theta$  um número real pertencente ao intervalo  $]0, \pi[$

Em  $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos, considere  $z = \frac{-1+i}{(\rho \operatorname{cis} \theta)^2}$  e  $w = -\sqrt{2}i$

Sabe-se que  $z = w$

Determine o valor de  $\rho$  e o valor de  $\theta$

3. Considere, num referencial o.n.  $Oxyz$ , o plano  $\alpha$  definido pela equação  $3x + 2y + 4z - 12 = 0$

3.1. Seja  $C$  o ponto de coordenadas  $(2, 1, 4)$

Escreva uma equação vetorial da reta perpendicular ao plano  $\alpha$  que passa no ponto  $C$

3.2. Seja  $D$  o ponto de coordenadas  $(4, 2, 2)$

Determine as coordenadas do ponto de intersecção da reta  $OD$  com o plano  $\alpha$

3.3. Sejam  $A$  e  $B$  os pontos pertencentes ao plano  $\alpha$ , tais que  $A$  pertence ao semieixo positivo  $Ox$  e  $B$  pertence ao semieixo positivo  $Oy$

Seja  $P$  um ponto com cota diferente de zero e que pertence ao eixo  $Oz$

Justifique, recorrendo ao produto escalar de vetores, que o ângulo  $APB$  é agudo.

4. Seja  $f$  a função, de domínio  $]-\frac{\pi}{2}, +\infty[$ , definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2 + \operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} & \text{se } -\frac{\pi}{2} < x \leq 0 \\ x - \ln x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Resolva os itens 4.1. e 4.2. recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

4.1. Estude a função  $f$  quanto à existência de assíntota oblíqua do seu gráfico.

4.2. Estude a função  $f$  quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, no

intervalo  $]-\frac{\pi}{2}, 0[$

4.3. Seja  $r$  a reta tangente ao gráfico da função  $f$  no ponto de abscissa  $\frac{1}{2}$

Além do ponto de tangência, a reta  $r$  intersecta o gráfico de  $f$  em mais dois pontos,  $A$  e  $B$ , cujas abscissas pertencem ao intervalo  $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$  (considere que o ponto  $A$  é o de menor abscissa).

Determine analiticamente a equação reduzida da reta  $r$  e, utilizando a calculadora gráfica, obtenha as abscissas dos pontos  $A$  e  $B$

Apresente essas abscissas arredondadas às centésimas.

Na sua resposta, reproduza, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que visualizar na calculadora e que lhe permite(m) resolver o problema.

5. O José e o António são estudantes de Economia. O José pediu emprestados 600 euros ao António para comprar um computador, tendo-se comprometido a pagar o empréstimo em prestações mensais sujeitas a um certo juro.

Para encontrarem as condições de pagamento do empréstimo, os dois colegas adaptaram uma fórmula que tinham estudado e estabeleceram um contrato.

Nesse contrato, a prestação mensal  $p$ , em euros, que o José tem de pagar ao António é dada por

$$p = \frac{600x}{1 - e^{-nx}} \quad (x > 0)$$

em que  $n$  é o número de meses em que o empréstimo será pago e  $x$  é a taxa de juro mensal.

Resolva os itens 5.1. e 5.2. recorrendo a métodos analíticos.

Na resolução do item 5.1., pode utilizar a calculadora para efetuar eventuais cálculos numéricos.

5.1. O José e o António acordaram que a taxa de juro mensal seria 0,3% ( $x = 0,003$ )

Em quantos meses será pago o empréstimo, sabendo-se que o José irá pagar uma prestação mensal de 24 euros?

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, cinco casas decimais.

5.2. Determine  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{600x}{1 - e^{-nx}}$ , em função de  $n$ , e interprete o resultado no contexto da situação descrita.

6. Seja  $g$  uma função contínua, de domínio  $\mathbb{R}$ , tal que:

- para todo o número real  $x$ ,  $(g \circ g)(x) = x$
- para um certo número real  $a$ , tem-se  $g(a) > a + 1$

Mostre que a equação  $g(x) = x + 1$  é possível no intervalo  $]a, g(a)[$

**FIM**

## COTAÇÕES

Grupo	Item												
	Cotação (em pontos)												
I	1. a 8.												40
	8 × 5 pontos												
II	1.1.	1.2.	2.	3.1.	3.2.	3.3.	4.1.	4.2.	4.3.	5.1.	5.2.	6.	160
	15	15	15	5	15	10	15	15	15	15	15	10	
TOTAL													200

ESTA FOLHA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

**Prova 635**

2.<sup>a</sup> Fase

**VERSÃO 1**